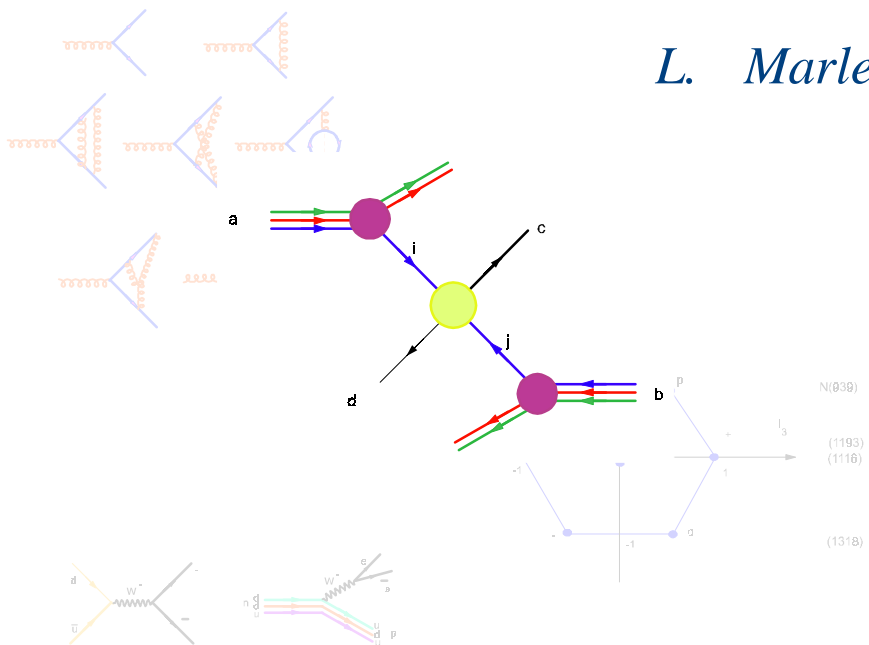


# Introduction à la physique des particules

*L. Marleau*





# Introduction à la physique des particules

*L. Marleau*

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace*  
et composé avec  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ .

© 1998-2000 L. Marleau.

Département de physique

Université Laval

Québec, Canada.

*Tous droits réservés. Aucun extrait de cet ouvrage ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de l'auteur*

# Table des matières

<b>Avant-Propos</b>		<b>xi</b>
<b>1 NOTIONS DE BASE</b>		<b>1</b>
1.1 Une brève historique		1
1.2 Survol rapide		3
Matière	3	
Les types d'interaction	6	
1.3 Définitions utiles		7
Bosons et fermions	7	
Particule-Antiparticule	8	
1.4 Système d'unités naturelles		8
1.5 Formalisme quadri-dimensionnel		11
1.6 Notions de physique quantique		14
Mécanique quantique relativiste	14	
Interactions versus champs	16	
1.7 Échelle des interactions		19
Interactions électromagnétiques	19	
Interactions faibles	20	
Interactions fortes	21	
Interactions gravitationnelles	23	
Tableau récapitulatif	24	
<b>2 SOURCES ET DÉTECTEURS</b>		<b>25</b>
2.1 Sources		25
Radioactivité	25	
Rayons cosmiques	25	
Accélérateurs	26	
2.2 Détecteurs		38
Principes de détections	38	

	Instruments de détection	42
2.3	Les principales expériences en cours	53
2.4	Problèmes	56
<b>3</b>	<b>DIFFUSION ET INTERACTION ENTRE PARTICULES</b>	<b>59</b>
3.1	Cinématique d'une réaction - Variables de Mandelstam	59
	Système du centre de masse (4-corps)	61
	Système du laboratoire (4-corps, cible fixe)	63
	La rapidité	64
3.2	Les interactions en mécanique quantique	65
3.3	La matrice de diffusion, $S$	68
3.4	Espace de phase	69
3.5	Section efficace	70
	Diffusion (4-corps)	73
3.6	Largeur de désintégration et vie moyenne	74
	Désintégration en 2 corps	76
	Désintégration en 3 corps	77
3.7	Problèmes	80
<b>4</b>	<b>SYMÉTRIES DE L'ESPACE-TEMPS</b>	<b>83</b>
4.1	Symétries en mécanique quantique	83
4.2	Invariance sous une translation	85
4.3	Rotation en trois dimensions	86
4.4	Parité	88
	Parité orbitale	89
	Parité intrinsèque	89
	Conservation de la parité totale	90
	Parité des antiparticules	91
	Exemples	91
4.5	Inversion du temps	92
	L'opérateur d'inversion du temps, $T$	92
	Application: le bilan détaillé	93
4.6	Invariance de jauge	94
	Transformation de jauge	95
	Les photons	97
4.7	Problèmes	99

<b>5</b>	<b>SYMÉTRIES INTERNES ET HADRONS</b>	<b>101</b>
5.1	Symétries globales et règles de sélection	101
	Charge électrique, $Q$	101
	Nombre leptonique total, $L$	102
	Nombre électronique, muonique, tauonique...	102
	Nombre baryonique, $B$	103
5.2	Isospin	104
	Symétrie $SU(2)$	106
	Générateurs de $SU(2)$	107
	Relation de Gell-Mann-Nishijima	107
	Conservation d'isospin	108
5.3	Étrangeté et hypercharge	109
5.4	Autres saveurs	111
	Charme	111
	Bottom	112
	Top	112
	Relation de Gell-Mann-Nishijima (révisée)	113
5.5	Conjugaison de la charge	113
	Parité de charge totale	114
	Invariance sous $\mathcal{C}$	115
	Les pions et les photons	115
	Systèmes particule-antiparticule	116
	Violation de $\mathcal{CP}$ ou $T$ et Théorème $\mathcal{CPT}$	117
5.6	Parité- $\mathcal{G}$	118
5.7	Résonances	120
5.8	Problèmes	123
<b>6</b>	<b>LE MODÈLE DES QUARKS</b>	<b>127</b>
6.1	Introduction	127
	Historique	127
6.2	Théorie des groupes	130
	Propriétés générales d'un groupe	130
	Groupe de Lie (compact)	131
	Représentations	132
	Racine, rang et poids	133
	Rotation en 2D — groupe $SO(2)$	135
	Rotation en 3D — groupe $SO(3)$	136
	Groupe $U(1)$	137
	Groupe $SU(N)$	137
6.3	Quarks et Représentations $SU(N)$	143
	Lien entre représentation $SU(N)$ et modèle des quarks	143
	Représentations irréductibles et Tableaux de Young	144

	Construction des fonctions d'onde	149
<b>6.4</b>	<b>Couleur</b>	<b>156</b>
	Groupe $SU(3)$ de Couleur	156
	Fonctions d'onde de couleur	157
	Évidence expérimentale	158
<b>6.5</b>	<b>Masses et Moments Magnétiques</b>	<b>160</b>
	Masses	160
	Moments magnétiques	162
<b>6.6</b>	<b>Diagrammes de flot de quarks</b>	<b>165</b>
<b>6.7</b>	<b>Charme et <math>SU(4)</math></b>	<b>166</b>
	Mésons	168
	Baryons	168
<b>6.8</b>	<b>Problèmes</b>	<b>173</b>
<b>7</b>	<b>INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES</b>	<b>177</b>
<b>7.1</b>	<b>Diffusion (non-polarisée) <math>e</math>-Noyau</b>	<b>177</b>
<b>7.2</b>	<b>Processus avec spin</b>	<b>182</b>
	Notions de spin	182
	Diffusion polarisée $e$ -Noyau	183
<b>7.3</b>	<b>Diffusion <math>e - N</math></b>	<b>184</b>
<b>7.4</b>	<b>Processus purement leptoniques en QED</b>	<b>185</b>
	Processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	186
	Diffusion de Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	187
<b>7.5</b>	<b>Corrections radiatives</b>	<b>187</b>
	Moments magnétiques leptoniques	189
	Structure hyperfine	191
<b>7.6</b>	<b>Symétries de jauge: Une approche plus formelle</b>	<b>191</b>
	Formalisme lagrangien	192
	Théorème de Noether et invariance de jauge globale	192
	L'invariance de jauge locale en QED	193
<b>8</b>	<b>INTERACTIONS FAIBLES</b>	<b>195</b>
<b>8.1</b>	<b>Classification des interactions faibles</b>	<b>195</b>
<b>8.2</b>	<b>Théorie de Fermi et interaction <math>V - A</math></b>	<b>197</b>
<b>8.3</b>	<b>Non conservation de la parité</b>	<b>201</b>
<b>8.4</b>	<b>Théorie électrofaible</b>	<b>203</b>
	Charge faible	204
	Modèle de Weinberg-Salam (survol)	204



	Mécanisme et particule de Higgs	206
8.5	Angle de Cabbibo et matrice de Kobayashi-Maskawa	210
8.6	Courants neutres	211
8.7	Mécanismes de GIM (Glashow-Illiopoulos-Maiani) et le charme	211
8.8	Physique du $K^0$ et $\bar{K}^0$	215
	Modes de désintégration	217
8.9	Violation de $\mathcal{CP}$	219
	Implications cosmologiques	220
8.10	Problèmes	222
<b>9</b>	<b>INTERACTIONS FORTES (QCD)</b>	<b>223</b>
9.1	Diffusion $e - N$	223
9.2	Invariance d'échelle	224
9.3	Modèle des partons	225
9.4	Liberté asymptotique et confinement	229
9.5	Annihilation $e^+e^-$	233
	Événement à deux jets	235
	Événement à trois jets	236
	Section efficace totale	236
9.6	Diffusion $\nu - N$	238
	Section efficace	239
	Invariance d'échelle	239
9.7	Modèle des quarks-partons et fonctions de structure	240
9.8	Collisions hadron-hadron	243
9.9	Violation d'échelle	244
9.10	Existence des quarks	244
9.11	Problèmes	246
<b>10</b>	<b>UNIFICATION DES FORCES</b>	<b>247</b>
10.1	Divergences et renormalisabilité	247
10.2	Au-delà du modèle standard	248
	Le modèle standard en bref	248
	Lacunes du modèle standard	249
	Vers une théorie au-delà du modèle standard	250
10.3	Grande unification	251
	Modèle $SU(5)$	253
	Modèle $SO(10)$	257

Autres modèles d'unification	257
10.4 Technicouleur	259
10.5 Modèles composites	260
Modèle d'Abbott et Farhi	260
10.6 Supersymétrie (SUSY)	261
Modèles supersymétriques	264
10.7 Gravité quantique	266
La supergravité	267
10.8 Supercordes	269
<b>A Références</b>	<b>275</b>
<b>B Prix Nobel de physique</b>	<b>279</b>
<b>C Notation, conventions, constantes de physiques</b>	<b>283</b>
C.1 Notations	283
C.2 Constantes fondamentales en physique	283
C.3 Unités SI	285
C.4 Unités naturelles	286
C.5 Coefficients de Clebsh-Gordan	288
<b>D Rappel de relativité restreinte et cinématique relativiste</b>	<b>289</b>
D.1 La relativité restreinte	289
D.2 Cinématique relativiste	291
<b>E Équation de Dirac</b>	<b>299</b>
<b>F Particules, collisionneurs,...</b>	<b>303</b>
<b>Index</b>	<b>307</b>

# Avant-Propos

Il existe présentement très peu de livres — à peine cinq ou six — qui introduisent les fondements de la physique des particules dans un langage qui reste au niveau du 1<sup>ier</sup> cycle (B.Sc.) et malheureusement, ceux-ci sont tous en anglais. Cet ouvrage répond donc à un besoin réel, c'est-à-dire une référence, en français, de niveau du 1<sup>ier</sup> cycle qui introduit toutes les facettes de la physique des particules. Il se veut aussi un bon point de départ pour les étudiants du 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cycles (M.Sc. et Ph.D. respectivement) qui poursuivent les études et recherches dans le domaine.

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cadre du cours de *Physique des particules (PHY-10518)* offert aux étudiants de dernière année du B.Sc. au Département de physique de l'Université Laval. Il requiert des notions élémentaires de relativité restreinte et de mécanique quantique.

Les chapitres 1, 2 et 3 portent respectivement sur les notions de base, les techniques expérimentales et sur la dynamique des collisions. Les chapitres 4 et 5 couvrent les symétries et lois de conservation observées alors que dans le chapitre 6 on introduit le modèle des quarks. Les interactions électromagnétiques, faibles et fortes sont traitées aux chapitres 7, 8 et 9. On termine par un survol des différentes tentatives d'unification ou d'extension du *modèle standard*. Les appendices contiennent un résumé des notations, des tables de propriétés, un aide-mémoire et une liste assez complète de références complémentaires.

De plus, dans un but essentiellement pédagogique, cet ouvrage contient:

- une table des matières
- une brève historique
- une abondance de graphiques et illustrations, au-delà de 163
- de nombreux tableaux, plus de 85.
- 19 exemples ou exercices avec solutionnaires
- 49 problèmes
- 37 références complémentaires (sur support papier ou sur internet)
- un résumé des notations
- des tables de propriétés des particules
- un aide-mémoire
- des compléments en appendice
- une liste des prix Nobel de physique
- un index complet
- un total de plus de 320 pages

Le document est en couleur dans sa version originale. Il va s'en dire que si le docu-

ment est imprimé ou copié en noir et blanc, certaines informations sont perdues. C'est notamment le cas dans certains graphiques où les courbes sont tracées en couleur dans le but de les distinguer. Cependant la grande majorité des éléments colorés ont surtout une fonction esthétique et leur version noir et blanc ne prête pas à confusion.

Le lecteur est invité à consulter l'ouvrage dans le document **couleur** qui se trouve sur internet à l'adresse: [http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/marleau\\_pp.html](http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/marleau_pp.html) sous le format de fichier Adobe Acrobat (PDF). La lecture de ce format nécessite le logiciel Adobe Acrobat Reader (version 3.0 ou mieux) ou l'équivalent.

Bonne lecture!

Québec  
Janvier 2000

Luc Marleau  
Département de Physique  
Université Laval

# 1 NOTIONS DE BASE

## 1.1 Une brève historique

Année	Événement
1927	Découverte de la désintégration $\beta$ .
1928	P.A. Dirac propose son équation d'onde relativiste pour l'électron.
1930	W. Pauli suggère l'existence du neutrino.
1930	Particules élémentaires incluent: - électron, proton, neutron (dans le noyau), neutrino (et anti-neutrino) dans la désintégration $\beta$ , photon — le quantum de champ électromagnétique.
1931	Découverte du positron $\bar{e}$ (Anderson). Dirac réalise que le positron est aussi décrit par son équation.
1932	Découverte du neutron $n$ (Chadwick).
1933/4	Théorie de Fermi de la désintégration $\beta$ (interaction faible): $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
1935	Hypothèse de Yukawa sur les mésons: La force nucléaire est due à l'échange de particules massive, les mésons.
1937	Découverte du lepton $\mu$ (muon). Interprété initialement, à tort, comme le méson de Yukawa. S'avère trop "pénétrant".
1938	Loi de conservation du nombre baryonique
1946-7	Découverte du méson chargé $\pi^\pm$ , le pion (Powell). Le $\mu$ est produit par le processus $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ .
1946-1950	Théorie quantique de électromagnétisme (QED) (Feynman, Schwinger and Tomonaga).
1948	Production artificielle de $\pi^+$ .
1949	Découverte du $K^+$ .
1950	Découverte du pion neutre, $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ .
1951	Découverte d'événements en 'V' à Brookhaven, New York. Particules $K^0$ et $\Lambda$ ayant une vie moyenne "étrangement" longue et nouveau nombre quantique "l'étrangeté".
1952	Découverte du $\Delta$ (état excité du nucléon)
1954	Yang et Mills proposent des théories de jauge non-abéliennes.

Année	Événement
1955	Découverte de l'anti-proton $\bar{p}$ (Chamberlain and Segre).
1956	Lee et Yang suggèrent que la force faible peut générer une violation $\mathcal{P}$ (parité)
1956	Découverte de violation $\mathcal{P}$ dans les atomes de cobalt 60. par Wu et Amber
1960/70	Découverte de centaines de particules "élémentaires" ( $\rho, \omega, K^*, \Delta, \Xi, \dots$ ) — une vraie jungle!
1961	Gell-Mann propose la voie octuple $SU(3)$ .
1962	Découverte de $\nu_\mu$ et $\nu_e$ .
1964	Quarks $u, d, s$ (Gell-man and Zweig).
1964	Quarks $c$ est suggéré.
1964	Découverte de violation $\mathcal{CP}$ dans les systèmes $K^0 - \bar{K}^0$ .
1965	Le nombre quantique de la couleur est proposée: toutes les particules observées sont de couleur neutre.
1967	Glashow-Salam-Weinberg propose l'unification des forces électromagnétique et faible. Prédiction de l'existence du Higgs.
1968-69	SLAC détecte une structure ponctuelle au nucléon.
1973	QCD: la théorie des interactions fortes entre particules colorées. Prédiction de l'existence des gluons.
1973	Liberté asymptotique postulée.
1974	Découverte du $J/\psi$ et d'un nouveau quark, le charme $c$ , à Stanford et Brookhaven, USA.
1976	Découverte d'un troisième lepton chargé, le $\tau^-$ .
1976	Découverte du $D^0$ et confirmation du quark $c$ .
1978	Découverte d'un cinquième quark, le bottom $b$ , à Fermilab, USA.
1979	Découverte d'un gluon à DESY, Hambourg.
1983	Découverte du $Z^0$ et du $W^\pm$ au CERN.
1990	Mesure au LEP, CERN, impliquant que le nombre de neutrinos légers est limité à 3.
1995	Découverte d'un sixième quark, le top $t$ , à Fermilab, USA.
1998	Évidence de neutrinos massifs de Super-Kamiokande, Japon.

## 1.2 Survol rapide

### Matière

La description de la matière a depuis toujours intrigué l'humanité. Vu l'immense diversité des formes que prend la matière à l'échelle humaine, il est tentant de penser qu'à une échelle plus petite, elle existe sous une forme plus fondamentale voire plus simple. À tort ou à raison, l'approche scientifique s'est laissée guider par ce concept en espérant qu'une fois les *briques fondamentales* obtenues, il serait possible de reconstruire l'édifice jusqu'à notre échelle et même au-delà. Dans les faits, une telle reconstruction nous échappe encore...

La première notion d'éléments fondamentaux nous vient des grecs. On pensait que la Nature était composée de quatre éléments: l'air, le feu, l'eau et la terre (voir figure 1.1).

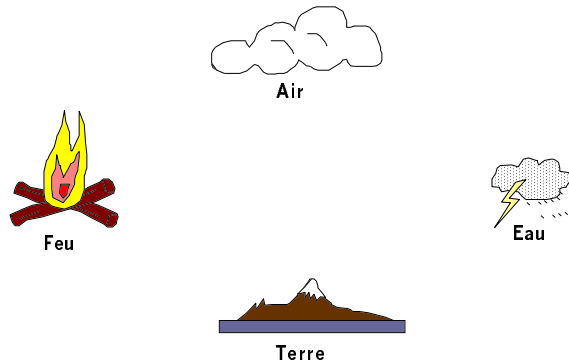


Figure 1.1 Les quatre éléments fondamentaux de la Nature (selon les grecs).

Ces éléments (toujours chez les grecs) furent ultérieurement remplacés par une notion qui semble simplificatrice de la Nature, celle de l'atome. Au début de notre siècle, s'est développée une version moderne de l'atome qui est représentée de façon simplifiée à la figure 1.2.

Il faut toutefois mentionner que cette approche n'a pas toujours fait l'unanimité. La philosophie arabe suggérait que les propriétés d'un objet devaient être décrites globalement et non à partir de ses constituants. Malheureusement, cette approche s'est avérée être un trop grand obstacle au progrès scientifique. Notre perception de la matière révèle une structure passablement riche dont voici une description sommaire.

### Leptons

Les leptons (ainsi nommés parce que leurs masses étaient relativement petites) sont

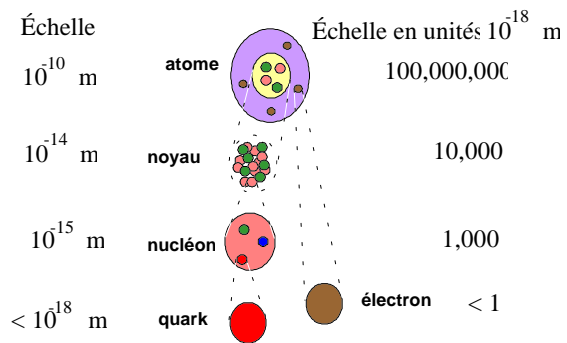


Figure 1.2 Échelles subatomiques.



caractérisés par les propriétés suivantes:

1. Ce sont des particules qui n'interagissent pas fortement (aucune interaction forte).
2. Ils ont des charges électriques entières (multiples de la charge de l'électron).
3. Ils possèdent une charge "faible" et forment des doublets d'interaction faible.
4. Ils obéissent à la statistique de Fermi-Dirac (fermions)

Les trois familles ou générations de leptons connues:

<b>Leptons</b>		
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$

### Hadrons:

Les hadrons sont caractérisés par les propriétés suivantes:

1. Ce sont des particules qui interagissent fortement (soumises à l'interaction forte "résiduelle").
2. Ils ont des charges électriques entière (multiple de la charge de l'électron).
3. Ils ont des interactions faibles.
4. Ils sont formés de quarks.

Les hadrons ne sont pas des particules fondamentales, mais plutôt des états liés de quarks. On en observe plus de deux cents. Les hadrons peuvent eux-mêmes être classifiés en deux groupes: les baryons, auxquels on associe un nombre quantique (le nombre baryonique) et, les mésons, qui sont responsables des interactions fortes entre hadrons. Voici les hadrons les plus fréquemment observés:

<b>Hadrons</b>	
$p$	proton
$n$	neutron
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	pions
$\rho^+, \rho^0, \rho^-$	mésons $\rho$
$\Lambda$	lambda
$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$	mésons $K$

Une liste plus exhaustive se trouve en appendice.

### Quarks:

Les quarks sont les particules fondamentales qui forment la matière nucléaire.

1. Ce sont des particules qui interagissent fortement (soumises à l'interaction forte)

2. Ils ont des charges électriques fractionnaires.
3. Ils possèdent une charge faible et forment des doublets d'interaction faible.
4. Ils possèdent une charge colorée (couleur) et forment des triplets d'interaction forte.
5. On a observé six espèces (saveurs ou parfums) de quarks regroupées en trois familles:

$$\begin{array}{c} \text{Quarks} \\ \hline \hline Q = \frac{2}{3} \quad \left( \begin{array}{c} u(\text{up}) \\ d(\text{down}) \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} c(\text{charme}) \\ s(\text{étrange}) \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} t(\text{top}) \\ b(\text{bottom}) \end{array} \right) \\ Q = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Les quarks apparaissent au moins en six saveurs (l'existence du quark top a été confirmé en 1995). Comme les leptons, ils peuvent être regroupés en doublets qui sont des copies conformes sauf pour ce qui est de leurs masses.

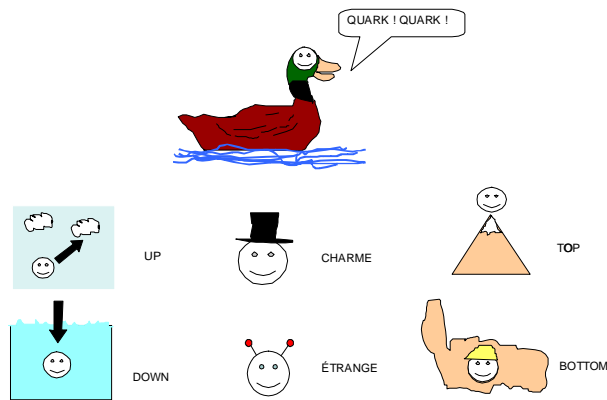


Figure 1.3 Les types de quarks: up, down, étrange, charme, bottom, top.

De façon générale, on soupçonne que les familles de quarks et leptons sont reliées; il en existe trois de chaque.

## Les types d'interaction

L'interaction entre particules de matière se fait via l'échange de particules (e.g. bosons de jauge) qui portent les quanta d'énergie-impulsion de quatre types d'interactions

(gravitationnelle, faible, électromagnétique et fortes).

### Mésons (interactions)

photon	$\gamma$	
3 bosons faibles	$Z_0, W^\pm$	
8 gluons	$g$	
Higgs (non-observé)	$H$	
graviton	$h_{\mu\nu}$	(1.1)

Le graviton et le Higgs n'ont jamais été observés. On recherche le Higgs activement. Par des moyens indirects on estime aujourd'hui sa masse à environ 350 GeV (cet estimé change fréquemment et pourrait déjà être obsolète). Il existe toutefois plusieurs scénarios qui ne requièrent pas de Higgs; son existence reste pour le moment une question ouverte. Par ailleurs, d'autres modèles proposent plusieurs Higgs. Le graviton quant à lui n'existe que dans le cadre de théories quantiques de la gravitation. Cependant aucune de ces théories n'est entièrement satisfaisante même si certaines sont prometteuses (supergravité, cordes, supercordes,...).

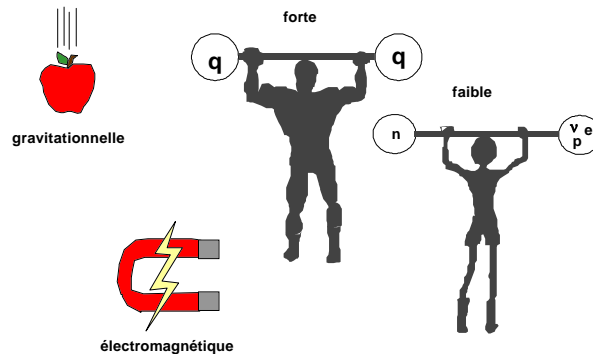


Figure 1.4 Les quatre forces de la Nature.

## 1.3 Définitions utiles

### Bosons et fermions

#### Bosons:

Les bosons sont des particules de spin entier ( $0\hbar, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$ ) qui obéissent à la statistique de Bose-Einstein i.e., un système de deux particules identiques, notées 1 et 2,

possède une fonction d'onde est symétrique sous l'échange des particules

$$\psi \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \psi. \quad (1.2)$$

### Fermions:

Les fermions sont des particules de spin  $\frac{1}{2}$ -entier ( $\frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \frac{5\hbar}{2}, \dots$ ) qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac i.e., un système de deux particules identiques, notées 1 et 2, possède une fonction d'onde est antisymétrique sous l'échange des particules

$$\psi \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} -\psi. \quad (1.3)$$

## Particule-Antiparticule

La notion d'antiparticule fut proposée par Dirac en 1928. Ce dernier interpréta certaines solutions de l'équation qui porte son nom comme des antiparticules. Les solutions associées aux antiparticules donnent lieu à différentes interprétations, e.g. une particule qui se propage à rebours dans le temps ou encore des trous dans une mer de particules. L'antiparticule est caractérisée par

1. des charges opposées à celle de la particule (charges électrique, faible, et autres nombres quantiques...)
2. masse et vie moyenne égales à celles des particules.

L'existence d'antiparticules fut confirmée par Anderson en 1933 suite à la découverte du positron (anti-électron). Certaines particules (e.g. le photon  $\gamma$  et le boson faible  $Z_0$ ) sont leur propre antiparticule, toutes leurs charges étant nulles.

Par convention, on désigne généralement l'antiparticule par une barre:

$$\begin{aligned} e &\leftrightarrow \bar{e} \\ \nu &\leftrightarrow \bar{\nu} \\ p &\leftrightarrow \bar{p} \\ \Sigma &\leftrightarrow \bar{\Sigma}. \end{aligned}$$

## 1.4 Système d'unités naturelles

Le système d'unités SI requiert trois étalons de mesure:

$$[\text{masse ou énergie}], [\text{temps}], [\text{longueur}] \quad (1.4)$$

La nature nous fournit deux constantes fondamentales qui sont particulièrement pertinentes pour des systèmes quantiques relativistes:  $c$  et  $\hbar$ . Il est donc plus *naturel* d'exprimer une vitesse comme une fraction de  $c$ , et un moment angulaire comme un multiple

de  $\hbar$ 

$$\begin{aligned} \text{Vitesse} &= \text{fraction de } c \\ \text{Spin} &= \text{multiple de } \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le système d'unités naturelles consiste à prendre comme étalon

$$\hbar = c = 1 \quad (1.6)$$

Rappelons que dans le système SI:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.7)$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (1.8)$$

**Exemple 1.1**

Exprimons le mètre et la seconde en unité naturelle: Par analyse dimensionnelle, il est facile de trouver la combinaison requise de  $\hbar$  et de  $c$  qui permette d'éliminer les unités indésirables. Pour le mètre, il suffit de diviser par  $\hbar c$  (qui s'exprime en unités m·MeV dans le SI):

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ m}}{\hbar c} &= \frac{1 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}} \\ &= 5.1 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \end{aligned}$$

Pour la seconde, on divise par  $\hbar$  (qui s'exprime en unités MeV·s dans le SI):

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ s}}{\hbar} &= \frac{1 \text{ s}}{6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}} \\ &= 1.52 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \end{aligned}$$

On remarque de ces exemples que les unités de longueur dans ce système s'expriment en inverse d'unités d'énergie

$$[\text{longueur}] = [\text{masse ou énergie}]^{-1} \quad (1.9)$$

que les unités de temps s'expriment aussi en inverse d'unités d'énergie

$$[\text{temps}] = [\text{masse ou énergie}]^{-1}. \quad (1.10)$$

Une quantité dans les unités SI (système international) qui possède des dimensions

$$E^p L^q T^r$$

où  $E$ ,  $L$  et  $T$  représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des unités d'énergie à la puissance  $p - q - r$ , soit  $E^{p-q-r}$ . La conversion du système SI au SU procède comme suit

$$[E^p L^q T^r]_{\text{SI}} = \left[ E^p \left( \frac{L}{\hbar c} \right)^q \left( \frac{T}{\hbar} \right)^r \right]_{\text{SI}} = \left[ \frac{E^p L^q T^r}{c^q \hbar^{q+r}} \right]_{\text{SI}}$$

où les quantités dans les crochets  $[A]_{\text{SU}}$  et  $[A]_{\text{SI}}$  sont exprimées en unités SU et SI res-

pectivement.

Quantité	SI			UN
	$p$	$q$	$r$	$n$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine $\alpha_{em}$	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

## 1.5 Formalisme quadri-dimensionnel

La similitude entre les notions de temps et d'espace nous suggère d'adopter un formalisme quadri-dimensionnel. Par exemple, le vecteur position  $x$  est représenté par ses composantes contravariantes  $x^\mu$  tel que

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (1.11)$$

En général, dans un espace vectoriel à  $D$  dimensions, il est possible de choisir  $D$  vecteurs de base  $e_\mu$  et de représenter un vecteur  $A$  à partir de ses composantes (contravariantes)  $A^\mu$ , parallèles aux  $e_\mu$ . Alors le vecteur  $A$  s'écrit dans un espace à  $4D$

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu = A^\mu e_\mu. \quad (1.12)$$

Le *produit scalaire* des vecteurs  $A$  et  $B$  prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^\mu e_\mu \cdot B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_\mu \cdot e_\nu \quad (1.14)$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs sont *orthogonaux*, i.e.

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (1.15)$$

et donc

$$A \cdot B = A^\mu B^\mu e_\mu^2. \quad (1.16)$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisée d'un vecteur position espace-temps est reliée à l'intervalle, e.g.

$$\begin{aligned} x^2 &= x^\mu x^\mu e_\mu^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ainsi la norme des vecteurs de base est

$$e_\mu^2 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu = 0 \\ -1 & \text{si} \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.18)$$

et le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Les composantes covariantes sont des projections orthogonales de  $A$  sur les vecteurs de base  $e_\mu$ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (1.20)$$

(notez l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse  $g^{\mu\nu}$  coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (1.22)$$

d'où

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad (1.23)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (1.24)$$

Par exemple, pour le quadri-vecteur contravariant de position

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (1.25)$$

on aura un quadri-vecteur covariant de position:

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (1.26)$$

et donc

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (x^0, \mathbf{x}) \\ x_{\mu} &= (x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.27)$$



### Remarque 1.1

Toute quantité qui a la forme

$$a \cdot b = a^{\mu} b_{\mu} \quad (1.28)$$

est un invariant de Lorentz si  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels.

Les notions d'énergie et d'impulsion sont aussi intimement liées (tout comme l'espace et le temps) en relativité restreinte. On peut définir le quadri-vecteur énergie-impulsion (composantes contravariantes)

$$p^{\mu} = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (1.29)$$

où  $E$  est l'énergie totale et  $p_i$  ( $i = x, y, z$  ou  $1, 2, 3$ ) sont les impulsions. L'énergie cinétique s'obtient par

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 \\ &= (\gamma - 1)m_0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

(rappelons qu'on utilise le système d'unités naturelles).

Par ailleurs, la grandeur de  $p$  est un invariant de Lorentz et s'écrit comme

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta} \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= E^2 - \mathbf{p}^2 \\
&= m_0^2.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \tag{1.32}$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \tag{1.33}$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimées de façon compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \tag{1.34}$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion, on a

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu; \tag{1.35}$$

et il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}}, \tag{1.36}$$

ce qui représente la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0, \tag{1.37}$$

la conservation de l'énergie totale, qui s'écrit aussi comme

$$E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}}. \tag{1.38}$$

On peut aussi déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité  $P^\mu$  (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion ( $E^2 - \mathbf{p}^2$ ) est un invariant relativiste (même grandeur dans tous les repères). Par exemple, dans le repère du laboratoire

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ après}} \right)^2. \tag{1.39}$$

Dans un repère  $S'$  on a

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ après}} \right)^2 = \left( P_{S'}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 = \left( P_{S'}^{\mu \text{ après}} \right)^2. \tag{1.40}$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), i.e. le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation tient toujours

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ après}} \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ après}} \right)^2. \tag{1.41}$$

on aura dans ce repère spécial,

$$\begin{aligned}
\left( P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 &= \left( P_{\text{RIN}}^0 \right)^2 - \left( \mathbf{P}_{\text{RIN}} \right)^2 \\
&= \left( P_{\text{RIN}}^0 \right)^2 = \left( E_{\text{RIN}}^{\text{tot}} \right)^2 \\
&= \left( \sum_n E_n \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Cette quantité correspond à la somme des énergies totales dans le RIN, élevée au carré.

## 1.6 Notions de physique quantique

### Mécanique quantique relativiste

Historiquement, le passage de la mécanique quantique à la mécanique quantique relativiste s'est effectué grâce à une généralisation de l'équation de Schrödinger à un système relativiste.

#### L'équation d'onde de Schrödinger

Rappelons que l'équation d'onde de Schrödinger est obtenue en définissant l'hamiltonien (énergie) et l'impulsion par les opérateurs différentiels suivant:

$$H \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{p} \equiv \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla \quad (1.44)$$

Dans le langage quadri-dimensionnel, on écrit ( $\hbar = c = 1$ )

$$p^\mu = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (1.45)$$

La notation est souvent simplifiée par

$$p^\mu \equiv i\partial^\mu. \quad (1.46)$$

L'équation de mouvement

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E \quad (1.47)$$

devient alors l'équation de Schrödinger

$$(-i\hbar \nabla)^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.48)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

où  $\psi$  est la fonction d'onde du système.

#### L'équation de Klein-Gordon

Les équations de mouvement relativistes obéissent plutôt à la relation ( $\hbar = c = 1$ )

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (1.51)$$

qui correspond, après substitution des quantités par leur représentation en terme d'opérateurs, à l'équation de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi - (-i\hbar\nabla)^2\psi &= m^2\psi \\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi &= m^2\psi \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi + m^2\psi \\ &= (-\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\psi \\ &= (p^2 - m^2)\psi \end{aligned}$$

Cette équation décrit les bosons (spin entier). Elle est toutefois non linéaire en énergie  $E$ . Incidemment, les états ne se combinent pas en général de façon triviale.

## L'équation de Dirac

Dans une tentative visant à linéariser cette équation (et à régler certains autres problèmes conceptuels comme des densités probabilité négatives), Dirac introduit un système linéaire de quatre équations couplées, l'équation de Dirac. Voici sa version la plus courante que nous écrivons sans beaucoup plus d'informations

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (1.52)$$

où le *bi-spinor*  $\psi$  possède quatre composantes et les  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) sont les quatre matrices  $4 \times 4$  de Dirac. Les matrices  $\gamma_\mu$  intègrent la notion de spin puisque qu'elles correspondent à une version généralisée des matrices de spin de Pauli. Pour cette raison, l'équation de Dirac convient à la description des fermions (spin demi-entier). Une description plus détaillée de l'équation de Dirac se trouve en Appendice.

## La théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs est depuis quelques années considérée comme un outil plus fondamental et plus puissant que la mécanique quantique. Sans trop aller dans les détails, mentionnons qu'elle est basée sur la seconde quantification des champs, c'est-à-dire sur les relations de commutation ou d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation (champs quantiques).

En bref, mentionnons que si la mécanique quantique promeut les coordonnées d'espace-temps et d'énergie-impulsion au rang d'opérateurs la théorie des champs de son côté, procède à une étape subséquente en élevant les fonctions d'onde au niveau d'opérateurs qui servent à créer ou détruire des états associés à des particules. Ces opérateurs sont appelés *champs quantiques*.

La théorie permet d'interpréter chaque phénomène comme une série d'opérateurs agissant sur le vide, e.g. création/annihilation de particule (opérateur de création/annihilation), interaction entre particules (opérateur de sommet) et échange ou propagation de particules (propagateur).

## Interactions versus champs

La mécanique classique et la mécanique quantique (ou plus précisément la théorie quantique des champs) ont des approches différentes lorsqu'il s'agit de décrire des interactions (voir figure 1.5).

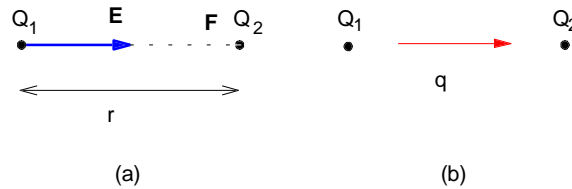


Figure 1.5 Approche classique (a) et quantique (b) des interactions.

### 1. En mécanique classique:

Un champ est produit par une particule 1 à la position de la particule 2. La particule 2 interagit avec la valeur de ce champ.

### 2. En théorie quantique des champs :

L'interaction est interprétée comme un échange de quanta. L'échange obéit aux lois de conservation des nombres quantiques et de la quadri-impulsion. Rappelons cependant que la quadri-impulsion n'obéit à l'équation d'onde que dans les limites du principe d'incertitude, c'est-à-dire

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1, \quad \hbar = 1. \quad (1.53)$$

Les états transitoires sont appelés *virtuels* (e.g. un photon virtuel peut avoir une quadri-impulsion telle que  $p^2 \neq 0$ ).

## Approche de Yukawa

En 1935, H. Yukawa propose une connexion entre la portée d'une interaction et la masse du quantum échangé pendant l'interaction. Il s'intéresse plus particulièrement à décrire les interactions fortes qui ont une portée finie de quelques fm. Par exemple, l'échange virtuel d'un boson de masse  $m$  peut se produire pendant un temps

$$\Delta t \approx \frac{1}{\Delta E} \approx \frac{1}{m}. \quad (1.54)$$

Il est donc caractérisé par une portée maximale de ( $c = 1$ )

$$R = c\Delta t = \Delta t \approx \frac{1}{m}. \quad (1.55)$$

Ce résultat peut être déduit plus formellement de l'équation de Klein-Gordon

$$\nabla^2 \psi + m^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons une composante de  $\psi$  statique à symétrie sphérique  $\psi(x_\mu) = U(r)$ . On peut

alors écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 U(r) + m^2 U(r) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right) + m^2 U(r) \end{aligned}$$

où  $r = 0$  est identifié à l'origine. La composante radiale de la fonction d'onde a pour solution

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-\frac{r}{R}}, \quad r > 0 \quad (1.56)$$

où

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{m}: && \text{portée des interactions} \\ g &= && \text{constante d'intégration.} \end{aligned}$$



### Exemple 1.2

Interaction électromagnétique.

Le photon est le quantum d'échange dans une interaction électromagnétique mais la masse du photon étant nulle

$$\nabla^2 U(r) = 0, \quad r > 0 \quad (1.57)$$

d'où

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi r}. \quad (1.58)$$

Si on interprète  $U(r)$  comme le potentiel électrostatique alors  $Q$  est la charge électrique à une constante multiplicative près.

Donc  $g$ , la constante d'intégration, joue le rôle de charge. La portée des interactions nucléaires (interactions fortes) est de  $R \simeq 10^{-15}$  m, ce qui poussa Yukawa à prédire une particule d'échange de masse  $m = \frac{1}{R} \simeq 100$  MeV et sans spin pour les interactions fortes. En 1947, le pion (spin 0,  $m = 140$  MeV) fut découvert.

L'approche de Yukawa est toutefois trop naïve pour expliquer le reste des phénomènes forts de façon adéquate.

## Propagateur du boson

Il est approprié de décrire une collision entre deux particules en terme d'amplitudes de probabilité. L'approche perturbative de la théorie des champs suppose que les particules se propagent librement sauf en certains points où il y a émission ou absorption de quanta. Il s'agit d'écrire la solution des équations de mouvement couplées comme une série perturbative autour des solutions libres des équations de mouvement pour des champs quantiques libres (aucun potentiel d'interaction implique des solutions libres). La méthode utilise les fonctions de Green auxquelles R.P. Feynman a donné son interprétation probabiliste des amplitudes.

L'équation de mouvement d'un boson libre (équations de Klein-Gordon) s'écrit

$$(p^2 - m^2)\psi(p) = 0 \quad (1.59)$$

où  $\psi(p)$  est une fonction scalaire. La fonction de Green  $G(p)$ , dans l'espace des impulsions, obéit à

$$(p^2 - m^2)G(p) = \delta^4(p) \quad (1.60)$$

ou encore

$$G(p) = \frac{\delta^4(p)}{(p^2 - m^2)}. \quad (1.61)$$

avec la fonction de Dirac  $\delta^4(p)$  définie comme  $\delta^4(p) = \delta(p_0)\delta(p_1)\delta(p_2)\delta(p_3)$ . Feynman interprète cet opérateur comme une amplitude de probabilité que le boson se propage avec une quadri-impulsion  $p$

$$\text{Propagateur} = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (1.62)$$

De la même façon, Feynman définit une amplitude de probabilité que le boson soit émis par la particule 1 (et/ou absorbé par la particule 2). Comme la grandeur de cette amplitude est proportionnelle à la force de l'interaction, elle dépend directement de la constante de couplage

$$\text{Sommet} = g_1 \quad (\text{et } g_2). \quad (1.63)$$

Cette interprétation a permis de développer une méthode graphique simple pour calculer la probabilité de certains processus: les *règles et diagrammes de Feynman*.

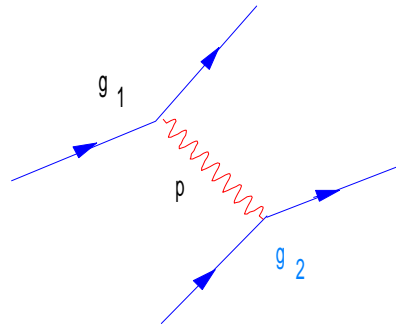


Figure 1.6 Exemple de diagramme de Feynman.



### Exemple 1.3

L'interaction électromagnétique entre deux particules chargées via l'échange d'un boson (voir figure 1.6) est donnée par le produit des amplitudes (sommets de couplage  $g_1$  (et  $g_2$ ) et propagateur):

$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_1 g_2}{p^2 - m^2} \quad (1.64)$$

$$\text{Probabilité} \propto \left| \frac{g_1 g_2}{p^2 - m^2} \right|^2. \quad (1.65)$$

En QED, la masse du photon est nulle et le couplage est proportionnel à la charge  $e$ . La section efficace pour la collision de particules chargées est

$$\frac{d^2\sigma}{dp^2} \propto \left| \frac{e^2}{p^2} \right|^2 = \frac{e^4}{p^4}, \quad (1.66)$$

un résultat qui a aussi été obtenu par Rutherford à l'aide de méthodes plus rudimentaires.

# 1.7 Échelle des interactions

## Interactions électromagnétiques

La force du couplage (aux sommets) est déterminé par la constante adimensionnelle

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0360} \quad (1.67)$$

Par exemple, la formule de Rutherford (éq. (1.66)) pourrait s'exprimer comme

$$\frac{d^2\sigma}{dp^2} \propto \frac{\alpha_{em}^2}{p^4}. \quad (1.68)$$

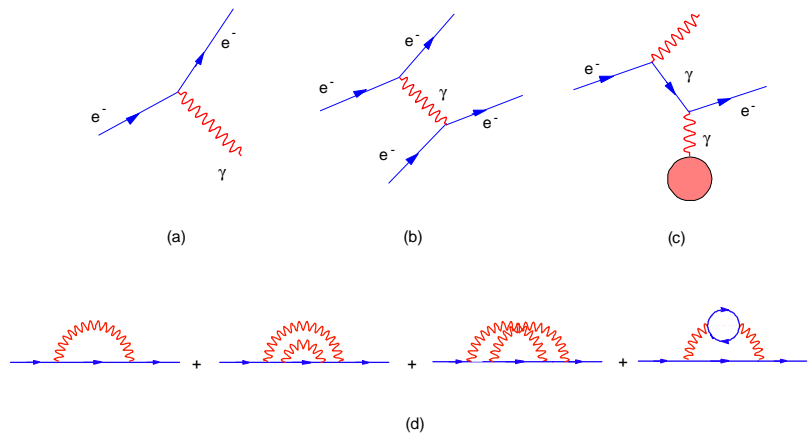


Figure 1.7 Exemples d'interactions électromagnétiques: (a) effet photoélectrique, (b) diffusion de Rutherford, (c) rayonnement de freinage et (d) diagrammes à plusieurs boucles pour la self-énergie.

Les interactions électromagnétiques (voir figure 1.7) sont alors caractérisées par les propriétés suivantes:

- mettent en jeu des particules chargées électriquement;
- couplage électromagnétique:  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0360}$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-20}$  s;
- section efficace typique de  $\sim 10^{-44}$  m<sup>2</sup>;
- échange de photons ( $\gamma$ );
- $m_\gamma = 0$ , donc portée  $R = \infty$ .

## Interactions faibles

Les principales manifestations des interactions faibles sont:

1. La désintégration  $\beta$  du neutron, e.g.  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .
2. La capture d'antineutrinos, e.g.  $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ .
3. Les réactions hadroniques pures, e.g. la désintégration des  $\Sigma$  peut passer par le mode faible ou le mode électromagnétique mais les caractéristiques diffèrent suivant le mode de désintégration:

$\underbrace{\Sigma^- \rightarrow n + \pi}_{\substack{\Delta S = 1 \\ \tau \simeq 10^{-10} \text{ s}}}$	$\underbrace{\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma}_{\substack{\Delta S = 0 \\ \tau \simeq 10^{-19} \text{ s}}}$
---	--

où  $\Delta S$  est le changement du nombre quantique d'étrangeté et  $\tau$  est la vie moyenne ou durée des interactions.

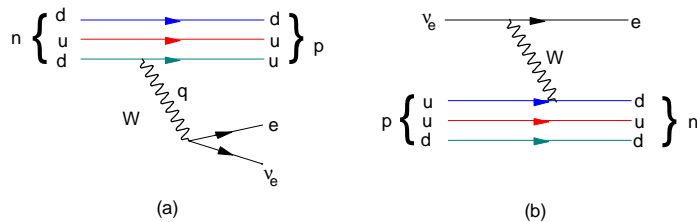


Figure 1.8 Exemples d'interaction faibles: (a) désintégration du neutron et (b) capture de neutrinos. Le contenu en quark du proton et du neutron ( $uud$  et  $ddu$  respectivement) est illustré clairement.

Les interactions faibles (voir figure 1.8) sont alors caractérisés par les propriétés suivantes:

- mettent en jeu des neutrinos ou des quarks qui changent de saveur i.e. des particules ayant une charge faible;
- couplage faible (entre protons):  $\alpha_{\text{Fermi}} = \frac{G_F m_p^2}{4\pi} \approx 10^{-6}$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-10}$  s;
- section efficace de  $\sim 10^{-33}$  m<sup>2</sup>;
- échange de bosons  $W^\pm$  (courants chargés) et  $Z^0$  (courant neutre);
- $m_W = 80$  GeV, donc portée  $R = 10^{-18}$  m.

Les interactions faibles sont décrites par le modèle de Glashow-Weinberg-Salam (1967) et mettent en jeu un couplage faible  $g_W$  et l'échange des bosons de jauge  $W^\pm$  et  $Z_0$ . Les



réactions faibles sont caractérisées par une amplitude de probabilité de la forme

$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_W^2}{q^2 - M_{W,Z}^2}. \quad (1.69)$$

où  $q^2$  est le transfert de quadri-impulsion porté dans l'échange du quantum. Dans

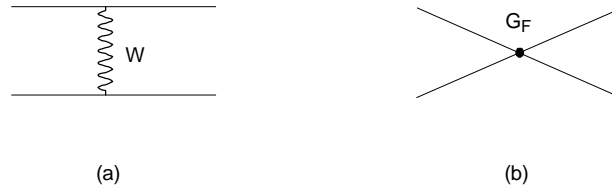


Figure 1.9 Théorie de Weinberg-Salam versus théorie de Fermi.

la limite  $q^2 \rightarrow 0$ , la théorie de Glashow-Weinberg-Salam se ramène à la théorie des interactions faibles de Fermi (1935) où les interactions impliquant quatre particules sont ponctuelles et de force  $G_F$ , la constante de Fermi (voir figure 1.9).

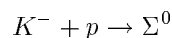
$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_W^2}{q^2 - M_{W,Z}^2} \quad (1.70)$$

$$\xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{g_W^2}{M_W^2} \equiv G_F \cong 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (1.71)$$

À l'instar de la théorie de Fermi, le modèle de Glashow-Weinberg-Salam a l'avantage d'être *renormalisable*. C'est aussi est exemple d'unification de forces (faible et e.m.).

## Interactions fortes

Les interactions fortes sont fréquentes dans les collisions de hadrons à haute énergie. Elles impliquent, au niveau fondamental, les interactions entre quarks et gluons. On les retrouve par exemple dans la collision



dont la durée est d'environ  $\tau \simeq 10^{-23}$  s.

Les interactions fortes (voir figure 1.10) sont caractérisées par les propriétés sui-

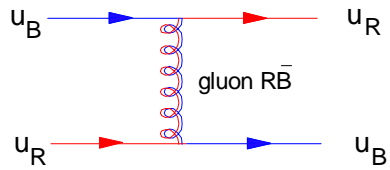


Figure 1.10 Exemple de diagramme de Feynman pour une interaction forte entre quarks.

vantes:

- mettent en jeu des particules portant une charge colorée (quarks et/ou gluons);
- couplage très fort:  $\alpha_s \simeq 1$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-23}$  s;
- section efficace typique de  $\sim 10^{-30}$  m<sup>2</sup>;
- échange de gluons;
- confinement des quarks et gluons;
- liberté asymptotique;
- portée effective de  $R = 10^{-15}$  m en raison du confinement;

## Interactions fortes résiduelles

Les interactions fortes résiduelles se situent à l'échelle nucléaire. Il s'agit de forces efficaces entre hadrons qui persistent malgré le confinement des quarks et des gluons. Elles sont responsables de la cohésion des noyaux et se manifestent dans les collisions hadroniques à basses énergies. La portée des interactions efficaces est finie ce qui correspond, selon l'approche de Yukawa, à des masses non-nulles pour les bosons d'échange, les mésons (voir figure 1.11).

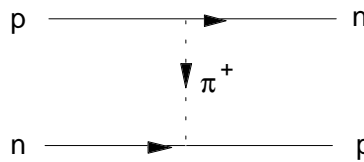


Figure 1.11 Exemple d'interactions fortes résiduelles.

## Interactions gravitationnelles

Il n'existe pas actuellement une théorie quantique gravitationnelle satisfaisante bien que la supergravité, les cordes ou les supercordes soient des bons candidats. Par contre, une théorie quantique gravitationnelle devrait posséder les caractéristiques suivantes:

- impliquent tout ce qui possède une énergie-masse et qui modifie la métrique (tenseur énergie-impulsion);
- couplage très faible: le couplage typique entre deux protons est  $\alpha_G = \frac{G_N m_p^2}{4\pi} \simeq 4.6 \times 10^{-40}$ ;
- boson d'interaction de spin 2 correspond à une fluctuation quantique de la métrique: le graviton;
- la gravitation ayant une portée infinie implique un graviton de masse nulle.

## Tableau récapitulatif

	Interactions			
	Gravité	Électromagnétique	Faibles	Fortes
Échange	10 gravitons	Photon	$Z^0, W^\pm$	8 gluons
Spin <sup>Parité</sup>	$2^+$	$1^-$	$1^-, 1^+$	$1^-$
Masse (GeV)	0	0	90, 81	0
Portée (m)	$\infty$	$\infty$	$10^{-18}$	$\infty, \leq 10^{-15}$
Source	Masse	Charge élec.	Charge faible	Couleur
Couplage	$4.6 \times 10^{-40}$	$\frac{1}{137}$	$8.1169 \times 10^{-7}$	$\simeq 1$
$\tau$ typique(s)		$10^{-20}$	$10^{-8}$	$10^{-23}$
$\sigma$ typique (m <sup>2</sup> )		$10^{-33}$	$10^{-44}$	$10^{-30}$



## 2 SOURCES ET DÉTECTEURS

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des méthodes expérimentales utilisées en physique des particules.

### 2.1 Sources

#### Radioactivité

La radioactivité provient de la désintégration spontanée (faible) de noyaux lourds. Elle est caractérisée par l'émission d'une ou plusieurs des particules légères suivantes

$$e^-, e^+, p, n \text{ et } \alpha (He^{++})$$

dont les énergies sont de l'ordre de grandeur des énergies de liaison nucléaire (environ 10 MeV).

#### Rayons cosmiques

Les rayons cosmiques sont des particules très stables (principalement des protons, des neutrons et des photons) qui se propagent à des distances astronomiques avant d'entrer dans l'atmosphère terrestre. Dès lors, ils interagissent avec les particules qui s'y trouvent et peuvent générer une multitude de sous-produits. Cette source a le désavantage d'être incontrôlable. En effet, on ne connaît a priori ni la nature, ni l'énergie, ni la trajectoire de la particule. De plus, les rayons cosmiques sont absorbés par l'atmosphère de sorte que seulement une fraction de ceux-ci arrive jusqu'à la surface de la Terre. Par ailleurs, l'énergie des rayons cosmiques est beaucoup plus grande que celle associée à la radioactivité. On leur identifie deux sources principales: une source stellaire associée aux basses énergies et une source galactique caractérisée par des énergies pouvant aller jusqu'à  $10^3$  TeV.

## Accélérateurs

Outre les sources naturelles, les physiciens des hautes énergies se sont donnés des outils pour étudier les phénomènes subatomiques: les accélérateurs de particules. Ces appareils ont mené à un progrès phénoménal notamment en physique des particules en permettant de sonder la matière à des distances de plus en plus petites.

Ce progrès n'a été possible que grâce à un accroissement constant de l'énergie des particules projectiles. Cet accroissement répond à deux objectifs:

1. La production de nouvelles particules finales, ce qui est possible si l'énergie initiale dans le centre de masse est suffisante.
2. Sonder la matière de plus en plus profondément pour découvrir des sous-structures, en diminuant la longueur d'onde des particules incidentes ( $\lambda = \frac{h}{p}$ ) pour obtenir un plus grand pouvoir séparateur au cours de diffusions à hautes énergies (exemple : diffusion très inélastique d'électrons très énergétiques sur des protons).

### Principe

Une particule de charge  $q$  placée dans les appareillages qui produisent des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  subira une force (conséquence des équations de Maxwell)

$$\mathbf{F}(t) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Cette relation tient pour des systèmes relativistes si on définit:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m \mathbf{v} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

D'autre part, le taux de travail accompli sur une particule chargée ou le gain d'énergie par unité de temps de la particule s'écrit

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dp_0}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Notons que le champ  $\mathbf{B}$  n'effectue aucun travail sur la particule. Donc de façon générale, le champ électrique est nécessaire pour accélérer les particules tandis que les champs magnétiques sont utilisés pour contrôler leur trajectoire. Un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse des particules permet de maintenir celles-ci sur une trajectoire circulaire si nécessaire. Des aimants quadripolaires (et quelques fois sextupolaires) tiennent le faisceau de particules chargées focalisé sinon le faisceau aurait tendance à se diffuser étant formé de particules avec des charges électriques de même signe.

### Accélérateur linéaire (Linacs) :

Dans un tube cylindrique sous vide sont alignées des électrodes cylindriques. On alterne la parité électrique des électrodes en les connectant à une source de radio-fréquence (voir figure 2.1). Les particules chargées sont accélérées pendant leur court passage entre deux électrodes successives puisque soumises à une différence de potentiel,  $V$ . Une fois que les particules sont dans les électrodes cylindriques et pendant la durée de leur trajet, il s'opère une inversion de polarité des électrodes avoisinantes si bien qu'à la sortie

elles sont soumises à la même différence de potentiel,  $V$ , et sont accélérées dans le même sens. Les électrodes sont conçues pour que le passage des particules à l'intérieur de chacune d'elles ait une durée correspondant à la moitié de la période de la radio-fréquence.

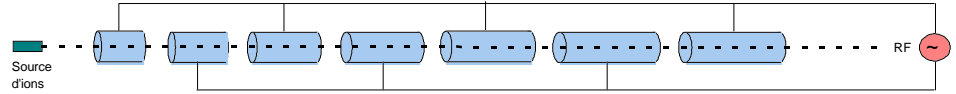


Figure 2.1 Accélérateur linéaire: Des électrodes avoisinantes sont soumises à une différence de potentiel oscillant à haute fréquence. La longueur de chaque électrode est ajustée pour qu'il ait toujours accélération des particules lors du passage entre deux électrodes.

Cette contrainte est toutefois moins importante pour une particule légère puisque dès qu'elle atteint une énergie cinétique comparable à sa masse, sa vitesse s'approche de  $c$ . Elle peut alors être accélérée par une onde électromagnétique produite dans une cavité résonnante. Les particules chargées, qui sont en général accélérées en paquets, se propagent alors en phase avec cette onde. Les accélérateurs linéaires à électrons permettent d'accélérer simultanément des positrons en alternant les paquets d'électrons et de positrons. Les positrons sont accélérés dans le même sens puisque soumis à une différence de potentiel,  $-V$ , à leur sortie des électrodes. Il est ensuite possible de séparer les faisceaux à la sortie de l'accélérateur grâce un champ magnétique.

Le plus grand de ces accélérateurs à électrons est encore celui de Stanford (U.S.A.) qui atteint une énergie de 20 GeV avec une longueur de 3 km. Depuis quelques années, ils est toutefois utilisé comme injecteur pour un projet plus ambitieux, le SLC. On y sépare les faisceaux électrons-positrons pour les orienter sur des trajectoires distinctes et, tout en continuant de les accélérer, on les guide vers une collision face-à-face (50 GeV sur 50 GeV) (voir figure 2.2).

## Accélérateurs circulaires (Synchrotrons)

L'ancêtre de ces appareil est le cyclotron, une invention due à Lawrence (1930). Il est basé sur l'idée de contenir la particule dans une région limitée à l'aide d'un champ magnétique. L'accélération est obtenue au moyen d'un champ électrique.

La source de particules est placée au centre d'une enceinte cylindrique sous vide. Les particules se propagent entre les deux pièces polaires d'un électro-aimant et sont donc constamment soumises à un champ magnétique uniforme  $B$ . L'appareil ressemble à un sandwich cylindrique coupé en deux le long de son diamètre (voir figure 2.3). Les électro-aimants ont une forme de D (d'où le nom de "dee"). Deux électrodes entre lesquelles est appliquée une tension variable à haute fréquence (HF) sont disposées dans l'espace séparant les deux D. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un D, l'équation de mouvement s'écrit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

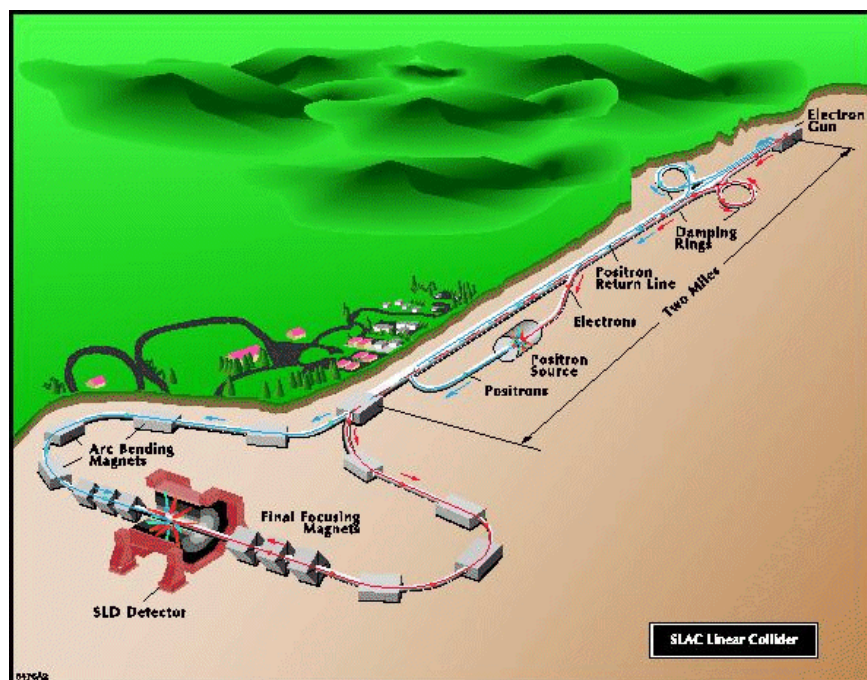


Figure 2.2 Le collisionneur SLC du SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) à Stanford, USA.



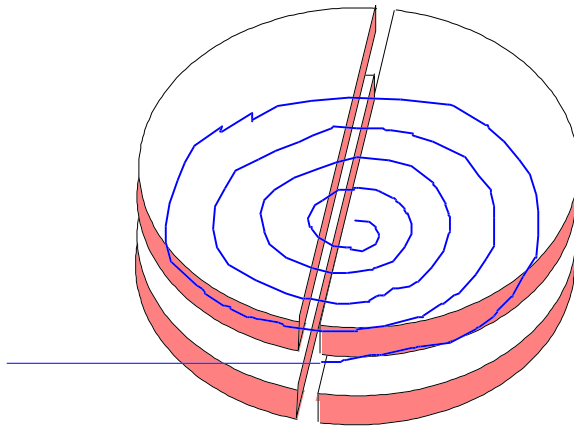


Figure 2.3 Cyclotron: la trajectoire des particules chargées est circulaire entre les électro-aimants en forme de D alors que celles-ci sont accélérées grâce à une tension appliquée dans la région séparant les deux D.

la vitesse  $|\mathbf{v}|$  étant constante.

Pour un champ uniforme et constant, si la vitesse initiale est perpendiculaire à la direction de  $\mathbf{B}$ , la trajectoire sera circulaire tout en demeurant dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  puisque

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{B} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

Le rayon de la trajectoire entre les D est donné par

$$\rho = \frac{\gamma m |\mathbf{v}|}{|q| |\mathbf{B}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{|q| |\mathbf{B}|} \quad (2.3)$$

avec une fréquence  $\omega = \frac{|q| |\mathbf{B}|}{\gamma m}$ . Le cyclotron atteint rarement des vitesses relativistes. Dans ce cas,  $\gamma \simeq 1$  et  $\omega$  ne dépend pas de  $v$ :

$$\omega \simeq \frac{|q| |\mathbf{B}|}{m}.$$

Il est possible d'accélérer la particule à chaque passage d'un D à l'autre, en appliquant une tension haute fréquence bien synchronisée. Il en suit un accroissement d'impulsion de

$$\Delta \mathbf{p} = |q| |\mathbf{E}| \Delta t = |q| |\mathbf{E}| \frac{d}{|\mathbf{v}|} = \frac{|q|}{|\mathbf{v}|} V$$

où  $d$  est la distance entre les D et  $V$ , la tension appliquée.

Puisque le rayon de la trajectoire dépend de l'impulsion, le tout se traduit par un accroissement correspondant du rayon  $\rho$ , et la trajectoire ressemble globalement à une spirale faite de demi-cercles.

Pour un rayon, un champs magnétique et une impulsion exprimés en mètre, Tesla et GeV respectivement, (2.3) s'écrit ( $|q| = 1$ ),

$$|\mathbf{p}| = 0.3 |\mathbf{B}| \rho.$$

Par ailleurs, la direction de la courbure permet en général de déterminer le signe de la charge.

Lorsque la vitesse devient relativiste, la fréquence de rotation  $\omega = \frac{|q| |\mathbf{B}|}{\gamma m}$  est modifiée à chaque passage. Il est donc nécessaire de modifier la fréquence du champ électrique pour le synchroniser aux passages d'un paquet de particules au centre de la machine. C'est sur ce principe que sont construits les synchro-cyclotrons.

Toutefois, on atteint vite les limites raisonnables pour la dimension des électroaimants si on persiste à utiliser les synchro-cyclotrons pour des protons de plus de 1 GeV.

Finalement, dans les synchrotrons, on ajuste le champ magnétique  $\mathbf{B}$  pendant l'accélération de façon à maintenir le rayon de courbure du faisceau à peu près constant (voir figure 2.5). L'accélérateur consiste en: une série d'aimants dipolaire qui servent à courber la trajectoire, intercalés à des endroits stratégique des aimants quadripolaires (voir figure 2.3) pour focaliser le faisceau, des cavités résonantes à haute fréquence pour accélérer les particules et finalement des aires d'interactions où sont logés les détecteurs. Le faisceau lui-même est sous un vide presque parfait pour éviter des diffusions inutiles et des pertes d'intensité et d'énergie.

L'un des plus grands défis techniques dans la conception de ces appareils réside dans la focalisation optimale du faisceau. Puisque le faisceau est composé de particules de charges identiques, ces dernières ont tendance à s'éloigner les unes des autres causant une diffusion du faisceau de plus en plus grande. En plaçant un champ magnétique non-

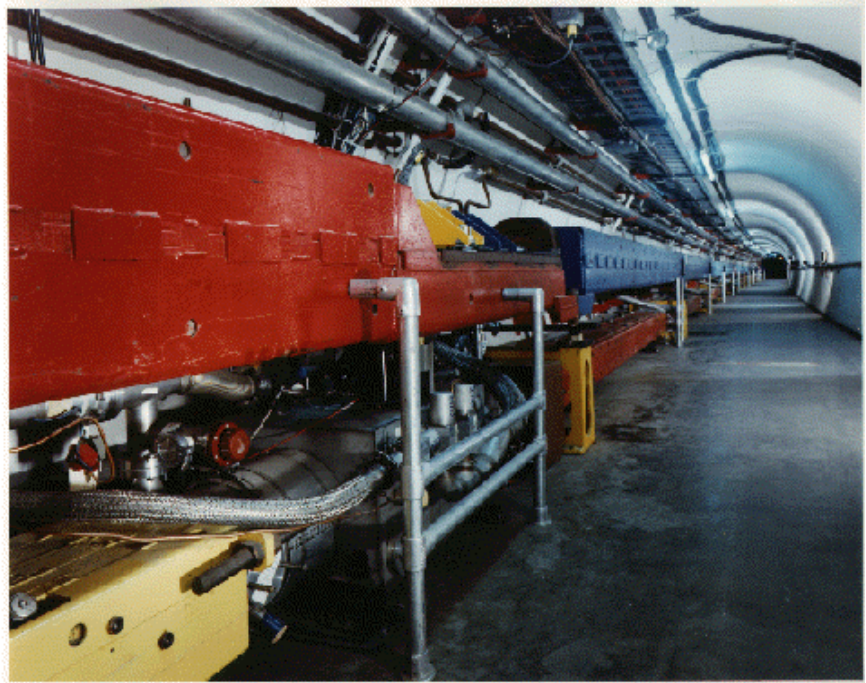


Figure 2.4 Aimants dans une section du tunnel au Tevatron, Fermilab à Batavia, USA.

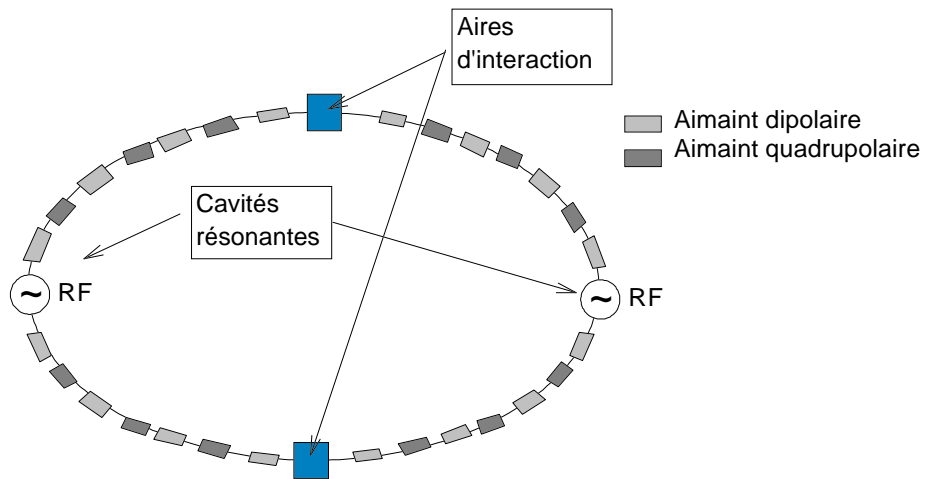


Figure 2.5 Schéma très élémentaire d'un synchrotron. Il faut noter qu'en général, un accélérateur est composé de beaucoup plus d'éléments (aimants sextupolaires, systèmes de refroidissement et de contrôle,...) et leur disposition est assez complexe.

homogène (quadrupôles), il est toutefois possible de focaliser le faisceau en ramenant les particules dans la direction principale.

## Accélérateurs de particules dans le monde

La conception optimale d'un accélérateur dépend d'un certain nombre de paramètres importants tels que ses dimensions, sa luminosité, son cycle de vie, la nature des particules accélérées et, non le moindre, le coût.

De façon générale, le collisionneur qui consiste en deux anneaux concentriques (synchrotrons) où sont accélérées les particules en sens inverses est un des plus performants puisque l'énergie disponible dans le centre de masse est très grande. Cependant, la probabilité d'une interaction lorsque deux faisceaux arrivent face-à-face est beaucoup plus faible que dans le cas d'une collision sur cible fixe à cause de la densité des faisceaux notamment. Cette probabilité est paramétrisée par une quantité appelée luminosité,  $\mathcal{L}$ . Le taux de réaction  $T$  pour un processus ayant une section efficace  $\sigma$  est alors

$$T = \mathcal{L}\sigma.$$

La luminosité dépend uniquement de la conception de l'accélérateur et non du processus:

$$\mathcal{L} = f \cdot n \cdot \frac{N_1 N_2}{A}$$

où  $f$  est la fréquence de révolution des particules,  $n$ , le nombre de paquets dans les faisceaux,  $N_1$  et  $N_2$ , le nombre de particules par paquet dans chaque faisceau et finalement,  $A$  est la section efficace des faisceaux dans le cas simple où ceux-ci se recouvrent complètement. La luminosité s'exprime en unités de  $\text{pb}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  où pb dénote une unité de surface appelée le picobarn ( $1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2 = 10^{-40} \text{ m}^2$ ).

La nature des particules accélérées joue aussi un rôle important dans le choix du design. Par exemple, on sait que des particules chargées en mouvement accéléré émettent un rayonnement électromagnétique. Lorsque l'accélération est normale, comme c'est le cas pour une trajectoire circulaire, il est appelé *rayonnement synchrotron*. Il y a donc perte d'énergie même si on ne fait que maintenir les particules chargées sur leur trajectoire circulaire. L'énergie perdue par tour est donnée par

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 v^2 \gamma^4}{\rho}$$

où  $v$  est la vitesse des particules,  $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$  est le facteur relativiste et  $\rho$  le rayon de courbure du faisceau. Cependant, on voit aisément que la perte d'énergie est d'autant plus grande que la masse des particules est petite pour des faisceaux de même énergie. En effet

$$\gamma = \frac{E}{m},$$

et, par exemple, si on compare des faisceaux d'électrons et de protons de mêmes énergie et courbure,

$$\frac{(\Delta E)_e}{(\Delta E)_p} = \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^4 \simeq 10^{13}.$$

En fait, les derniers grands accélérateurs ont tous été construits sur le principe du collisionneur. La prochaine génération d'accélérateurs d'électrons (au-delà du TeV) devra être basée sur le principe des machines linéaires (voir figure 2.6).

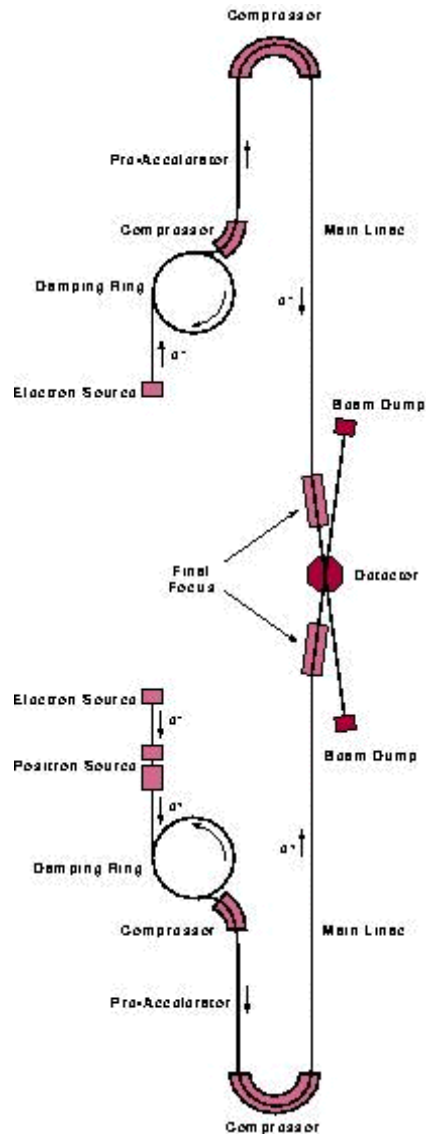


Figure 2.6 La prochaine génération de collisionneurs linéaires électron-positron, NLC (Next Linear Collider).

Collisionneurs				
	Projet/Laboratoire	Énergie (GeV)	Circonférence (km)	
$e^+e^-$	CESR (1979) Cornell–Ithaca,USA	6 + 6		
	PEP SLAC–Stanford,USA	15 + 15		
	PEP-II (1999) SLAC–Stanford,USA	9 + 3.1		
	PETRA (1992-) DESY–Hambourg,All.	23 + 23		
	TRISTAN (1999) Tsukuba–KEK,Japon	30 + 30		
	SLC (1989) SLAC–Stanford,USA	50 + 50		
	LEP I et II (1990-) CERN–Genève,Suisse	I: 45 + 45 II: 87 + 87	26.659	
	VLEPP (?) INP–Serpukov,Russie	500 + 500 1000 + 1000		
	$p\bar{p}, pp$	SppS (1981–1990) CERN–Genève,Suisse	315	6.911
		Tevatron (1987-) Fermilab–Batavia,USA	900 + 900	6.28
LHC (~2004) CERN–Genève,Suisse		7000 + 7000	26.659	
SSC (Annulé) SSC–Waxahachie,USA		20000 + 20000	87.12	
$ep$		HERA (1992-) DESY–Hambourg,All.	$e$ : 30 + $p$ : 820	6.336

Outre leur utilisation en physique des particules, les accélérateurs s'avèrent maintenant essentiels dans l'étude de la radiation synchrotron, pour des expériences en physique atomique, en physique du solide, en biologie et pour étalonner certains instruments d'astrophysique. Notons qu'ils se révèlent des instruments de vérification très efficaces de la théorie de la relativité restreinte.



Figure 2.7 Vue aérienne du Tevatron de Fermilab à Batavia, USA.



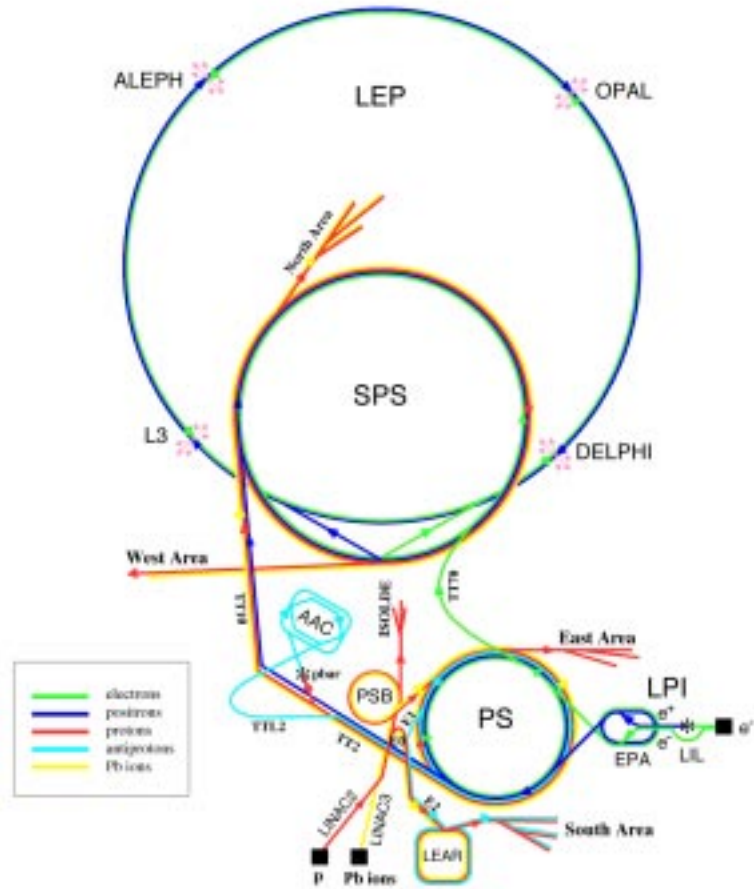


Figure 2.8 Plan des accélérateurs (PS, SPS et LEP) et des sites d'interactions (ALEPH, OPAL, L3 et DELPHI) du CERN à Genève, Suisse.

## 2.2 Détecteurs

Un détecteur sert à identifier les caractéristiques des particules en jeu dans une réaction. De manière plus générale, les détecteurs peuvent remplir de nombreuses fonctions.

- ▶ Décrire dans la mesure du possible la trajectoire de chacune des particules. À cet effet, on utilise plusieurs méthodes soit des petits compteurs dont la position et l'alignement permettent de déterminer la direction d'une particule, soit des détecteurs entrecroisés et empilés formant une matrice pouvant identifier les directions de plusieurs particules, ou bien encore tout simplement un détecteur à trace, qui comme son nom l'indique, trace la trajectoire des particules qui le traversent.

Mais ce n'est pas tout de "voir" la particule, il faut aussi être en mesure de:

- ▶ Déterminer l'impulsion et la charge électrique des particules chargées. Dans bien des cas, ces informations sont obtenues en observant la trajectoire de la particules dans un champ magnétique appliqué sur une partie du trajet;
- ▶ Identifier chaque particule en mesurant sa masse. Pour les particules chargées, la mesure simultanée de leur impulsion et de leur vitesse par l'ionisation d'un milieu mène à ce résultat;
- ▶ Finalement, la sélection d'événements par ce qu'on appelle "triggers" ou déclencheurs est une fonction cruciale dans les détecteurs pour éviter un cumul inutile d'événements qui ne sont pas pertinents dans l'étude en cours. Cette sélection doit s'effectuer très rapidement. Elle est en général effectuée par des détecteurs possédant un temps de réponse très court.

Ce ne sont pas les seules contraintes auxquelles sont confrontés les expérimentateurs. Le détecteur parfait devrait être aussi efficace quelque soit le type de particules, devrait prendre ses mesures sans influencer le système ou sans être affecté par le faisceau, devrait avoir une précision illimitée, etc... Dans la pratique, on fait appel à une combinaison de détecteurs différents chacun spécialisé à des tâches bien précises afin d'optimiser la quantité et la qualité des mesures effectuées. Ces dernières sont alors mises en commun et analysées.

Mais avant de décrire les principaux détecteurs, examinons quels principes physiques sont exploités dans la construction de ces appareils.

### Principes de détections

Pour qu'il y ait détection, il faut qu'il y ait interaction. La très grande majorité des détecteurs se basent sur les interactions électromagnétiques des particules avec la matière. C'est pourquoi, à quelques exceptions près, que seules les particules chargées sont détectées directement. Les photons, bien que neutres, se manifestent par leurs interactions avec ces particules chargées.

Les autres particules neutres n'ont aucune interaction électromagnétique. Ils ne peuvent être "vues" qu'à la suite de collisions, désintégrations ou tout autre processus produisant des particules chargées secondaires.

## Ionisation

Le processus le plus courant est l'ionisation. Le champ électromagnétique d'une particule chargée en mouvement accélère les électrons des atomes avoisinant sa trajectoire et les ionise. L'ion est alors détectable soit chimiquement, soit électriquement (voir figure 2.9).

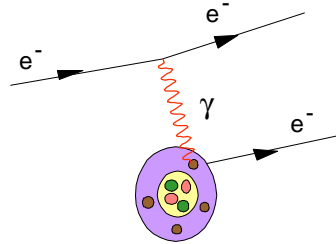


Figure 2.9 Processus d'ionisation d'un atome.

Dans le processus, la particule chargée continue sa trajectoire mais une partie de son énergie est absorbée par le milieu. La théorie permet de très bien prédire le taux de ces pertes qui sont principalement dues à la diffusion coulombienne par des électrons atomiques (à ne pas confondre avec la diffusion coulombienne avec les noyaux). Les calculs de Bethe, Bloch et d'autres dans les années '30 mènent à la formule de Bethe-Bloch qui exprime le taux de perte en fonction de la distance de pénétration  $x$ ,

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{DZ^2 n_e}{v^2} \left[ \ln \left( \frac{2mv^2\gamma^2}{I} \right) - v^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

où  $m$ ,  $Z$  et  $v$  sont la masse, la charge et la vitesse de la particule respectivement ( $\hbar = c = 1$ ).  $\gamma$  est le facteur de Lorentz  $(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . La constante  $D$  est donnée par

$$D = \frac{4\pi\alpha_{em}}{m}$$

alors que  $I$  est le potentiel d'ionisation moyen ( $I = 10Z$  eV pour  $Z > 20$ ). La fonction  $\delta$  tient en compte l'effet d'écran diélectrique. Finalement,  $n_e$  est la densité électronique du milieu.

En principe, la formule ci-haut s'applique seulement aux particules de spin-0 mais les corrections pour les particules de spin- $\frac{1}{2}$  sont petites et à toutes fins pratiques négligeables. À petite vitesse, le comportement de  $-\frac{dE}{dx}$  est dominé par le facteur  $\frac{1}{v^2}$  dans l'expression. Toutes les particules chargées passent par un minimum d'ionisation pour des valeurs  $v\gamma$  d'environ 3 ou 4. Finalement, pour de très grande impulsion,  $v$  est pratiquement l'unité et l'expression augmente logarithmiquement jusqu'à ce qu'elle soit contrebalancée par l'effet d'écran.

Une connaissance approfondie du milieu ionisé permet alors de déterminer la vitesse et la charge de la particule chargée.

## Diffusion de Coulomb

La particule chargée peut aussi interagir électromagnétiquement avec des noyaux lourds. C'est ce qu'on appelle la diffusion de Coulomb. (Voir figure 2.10) La réaction

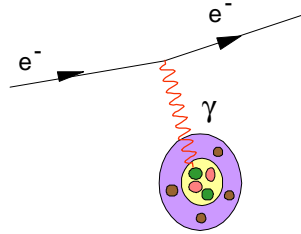


Figure 2.10 Diffusion de Coulomb (particule chargée avec noyau).

est en général plus brutale pour la particule incidente à cause de la masse du noyau. Ce processus est caractérisé par:

- une cible immobile ou presque;
- une diffusion transverse ou un angle de diffusion appréciable;
- une collision élastique ou quasi-élastique (conservation de l'énergie).

## Rayonnement de freinage

Dans ce processus, la collision particule-noyau est accompagnée de l'émission d'un photon et donc se distingue de la diffusion de Coulomb par son inélasticité (voir figure 2.11). Des calculs détaillés donnent un taux de perte d'énergie pour des électrons relativistes (avec  $E \gg \frac{m}{\alpha_{em} Z^{\frac{1}{3}}}$ ) de

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est la longueur de radiation

$$\lambda^{-1} = 4 \frac{Z(Z+1)}{m^2} \alpha_{em}^3 n_a \ln \left( \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right)$$

avec la densité atomique  $n_a$ . Contrairement à l'ionisation, le rayonnement de freinage dépend fortement de la masse de la particule chargée ( $\propto m^{-2}$ ) et sera dominant pour des particules peu massives (électrons et positrons).

## Absorption de photons par la matière

Les photons ont une forte probabilité d'être absorbés ou diffusés à de grands angles par les atomes dans un matériau. La densité  $I$  de photons monochromatiques d'un faisceau (ou l'intensité d'un faisceau) varie selon

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{I}{\lambda}$$

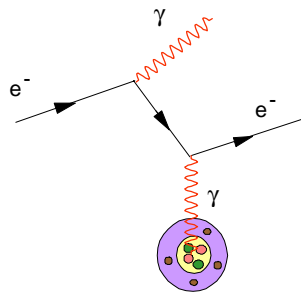


Figure 2.11 Rayonnement de freinage.

où  $\lambda$  est le chemin libre moyen qui est inversement proportionnel à la densité du matériau et à la section efficace d'absorption ou de diffusion:

$$\lambda^{-1} = n_a \sigma_\gamma.$$

Intégrant l'équation précédente, on trouve

$$I(x) = I(x_0) e^{-(x-x_0)/\lambda},$$

ce qui indique une diminution exponentielle de l'intensité du faisceau en fonction de la distance de pénétration.

L'absorption de photons par la matière passe par trois processus qui contribuent tous à la section efficace totale  $\sigma_\gamma$ :

- **Effet photoélectrique:** Un photon absorbé libère un électron des couches plus ou moins profondes. Le spectre d'absorption du milieu dépend de l'énergie des photons mais est surtout caractérisé par des pics correspondant aux énergies de liaisons des électrons (voir figure 2.12).

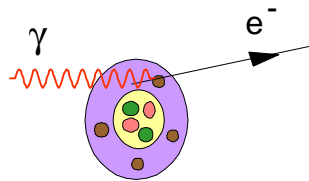


Figure 2.12 Effet photoélectrique.

- **Effet Compton:** L'effet Compton décrit le processus de diffusion d'un photon par la matière. Ce processus est inélastique (voir figure 2.13).
- **Création de paires:** Au-delà d'un certain seuil d'énergie  $E^2 = 2m_e c^2$ , les photons peuvent, en présence d'un champ externe, induire la création d'une paire particule-antiparticule dont les masses sont  $m_e$  (voir figure 2.14). On identifie deux contributions distinctes à la section efficace: une première où le champ externe est celui des électrons atomiques et une seconde où les photons interagissent avec le champ du noyau. À très haute énergie, la création de paires domine les effets photoélectrique et Compton dans l'expression de la section efficace totale  $\sigma_\gamma$ .

## Instrument de détection

### Chambre d'ionisation, compteur proportionnel et compteur de Geiger-Müller

Ces trois détecteurs sont en quelque sorte le même appareil qui fonctionne à trois régimes différents. Ils consistent d'un tube métallique rempli d'un gaz et traversé en son axe central par un fil de métal. Le fil et le cylindre sont soumis à une différence de potentiel  $V$  (voir figure 2.15). Lorsqu'une particule chargée traverse l'enceinte, le

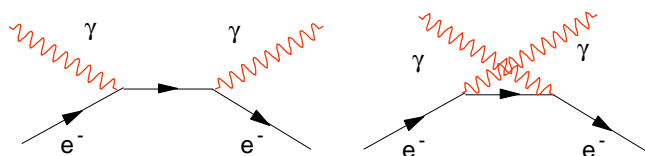


Figure 2.13 Effet Compton

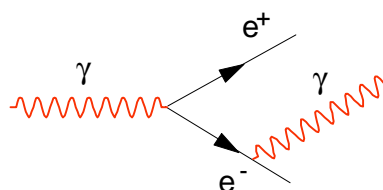


Figure 2.14 Création des paires particule-antiparticule.

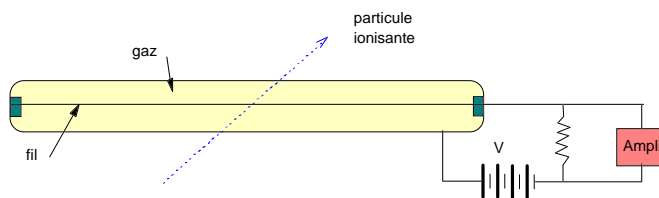


Figure 2.15 Chambre à ionisation.

gaz est ionisé. Électrons et ions se dirigent alors vers le fil ou la paroi du tube provoquant une impulsion électrique détectable aux bornes du détecteur. La tension  $V$  détermine la nature du signal. En deçà d'un certain seuil,  $V < V_{\text{seuil}}$ , l'ion et l'électron se recombinaient avant même de pouvoir atteindre les bornes. Alors aucun signal et aucune ionisation ne sont détectables. Pour  $V > V_{\text{seuil}}$ , trois régimes sont possibles :

1. **Le régime de la chambre d'ionisation** où  $V_{\text{seuil}} < V < V_{\text{ion}}$  : Les ions primaires produits par la particule chargée sont recueillis. Le signal est alors proportionnel au nombre, à la charge et à l'énergie des particules.
2. **Le régime du compteur proportionnel** où  $V_{\text{ion}} < V < V_{\text{GM}}$  : Pour un potentiel suffisamment grand, les ions sont accélérés à des énergies telles qu'ils ionisent eux-mêmes les autres atomes du gaz. Il en découle une amplification du signal qui est typiquement proportionnel à l'énergie des particules incidentes.
3. **Le régime du compteur de Geiger-Müller** où  $V > V_{\text{GM}}$  : Dans ce régime, une particule chargée déclenche l'ionisation complète du gaz. Le signal consiste alors en une brève impulsion dont l'intensité n'est plus proportionnelle à l'énergie.

Ces trois types de détecteurs peuvent aussi détecter des photons mais ceux-ci sont absorbés dans le processus.

### Chambre à fils (ou compteur proportionnel multifils) :

Le compteur proportionnel multifils, introduit par G. Charpak (1968-70), est basé sur l'idée d'aligner côte-à-côte des compteurs proportionnels. Les tubes sont remplacés par deux plans cathodiques espacés de 2 mm entre lesquels on place des fils anodiques parallèles à tous les  $20\mu\text{m}$ . L'enceinte entre les deux plans est remplie de gaz ionisant (voir figure 2.16).

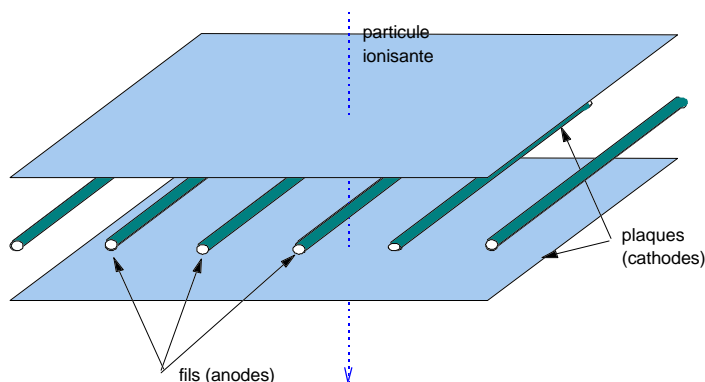


Figure 2.16 Schéma d'une chambre à multifils.

Une particule chargée passant à travers cet appareil produit une impulsion électrique sur le fil le plus proche de sa trajectoire. En disposant un deuxième détecteur de façon à



ce que les fils des deux compteurs forment un quadrillage, on obtient la position de la particule. Un empilement des plusieurs de ces compteurs permet de déterminer la trajectoire de la particule à  $500\mu\text{m}$  près avec un temps de réponse typique de 30 ns.

### Chambre à streamer et chambres à flash:

Utilisées dans le régime de Geiger-Müller, des chambres proportionnelles génèrent des avalanches d'électrons dans le gaz qui à leur tour produisent un plasma appelé "streamer" visible à l'oeil nu. Ce détecteurs se nomme "chambre à streamer". La chambre est préparée en envoyant de courtes impulsions électriques de 10 à  $50\text{ kV cm}^{-1}$  entre des plaques transparentes parallèles. Lorsqu'une particule chargée passe dans la chambre, elle déclenche une série de décharges qui dessinent sa trajectoire. Celle-ci peut être photographiée ou enregistrée électroniquement. La résolution spatiale de ces appareils est typiquement de  $200\mu\text{m}$ .

Pour une impulsion de très haut voltage, il se forme une ionisation complète entre le point de passage de la particule et le fil, produisant ainsi un "flash". Dans ce régime, on parle de "chambre à flash". Elles sont formées d'une multitude de tubes transparents et sont donc limités dans leur résolution spatiale par le diamètre des tubes. Ces détecteurs sont toutefois plus simples et moins coûteux que des chambres à multifils, ce qui représente un avantage certain dans la construction de détecteurs de grande dimension tels que les calorimètres.

### Chambre à dérive

Les chambres à dérive représentent aussi un choix valable face aux chambres à multifils. Dans ces détecteurs, les fils sont séparés d'une bonne distance. L'avalanche d'électrons déclenchée par une particule chargée qui traverse le gaz met alors un certain temps avant d'être recueillie par les électrodes (voir figure 2.17). La trajectoire est reconstituée en tenant compte du temps de dérive de l'avalanche qui est typiquement de l'ordre  $2\mu\text{s}$  — ceci représente aussi une contrainte puisqu'un seul événement peut être reconstitué pendant ce temps. Avec une vitesse de dérive d'environ 40 km/s et des dérives typiques de 10 cm, on atteint une résolution spatiale de 0.1 mm.

### Détecteur à semiconducteur

Dans le même ordre d'idée, on a mis au point plus récemment des détecteurs à semiconducteurs, qui sont en quelque sorte, des chambres à ionisation au silicium. Les paires électron-trou y jouent le rôle des paires électron-ion dans le détecteur à gaz. Ces détecteurs, beaucoup plus petits, ont une résolution spatiale sans égal ( $5\mu\text{m}$ ) et sont souvent utilisés pour localiser précisément la position d'un vertex d'interaction. Par ailleurs, ils sont facilement endommagés par la radiation et ne peuvent être utilisés près du faisceau principal.

### Chambre de Wilson, chambre à bulles et émulsion photographique

Ces trois types de détecteurs sont maintenant beaucoup moins utilisés qu'il y a moins de vingt ans et ce, principalement parce qu'ils ont un temps de réponse trop élevé et qu'ils sont mal adaptés aux conditions qui prévalent dans les collisionneurs.

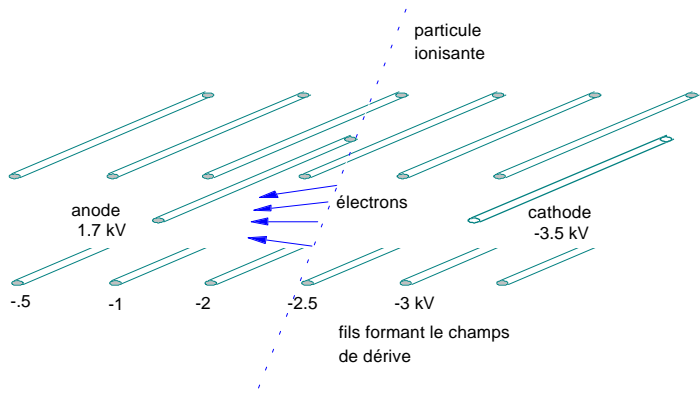


Figure 2.17 Schéma d'une chambre à dérive.

Les chambres de Wilson sont remplies de vapeurs d'alcool qui sont soudainement comprimées. Dans un état "superfroid", le gaz se condense à la moindre perturbation du milieu tel que le passage d'une particule chargée.

La chambre à bulles (inventée par Glaser) a connu des heures de gloire dans les années '60. Elle consiste en un récipient où de l'hydrogène liquide est maintenue sous pression pour être périodiquement (à toute les 0.1 s) relâchée rapidement. L'hydrogène liquide est donc temporairement à une température "superchaude" ( $T > T_{\text{ébullition}}$ ). Le passage d'une particule chargée déclenche la formation de bulles le long de la trajectoire. Le tout est photographié sous deux angles de vue, ce qui permet de reconstituer la trajectoire en trois dimensions (voir figure 2.18).

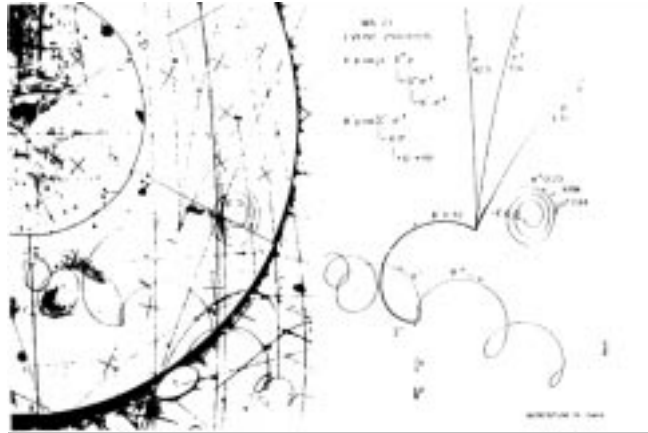


Figure 2.18 Exemple d'événement dans une chambre à bulle du SPS au CERN(gauche) et de sa reconstitution (droite).

Finalement, les émulsions photographiques sont sensibles aux radiations. Le milieu enregistre chimiquement la trajectoires des particules. Les émulsions sont exposées pendant un certain temps puis ensuite doivent être développées et analysées. La résolution spatiale est excellente soit  $1\mu\text{m}$  mais la résolution temporelle est presque inexistante à cause des délais de développement.

## Compteur à scintillations

L'excitation d'atomes dans certains milieux peut induire la luminescence (scintillation) qui à son tour est détectable par des photomultiplicateurs. C'est ce principe qui est utilisé dans les compteurs à scintillations.

Le scintillateur peut être soit organique, inorganique, solide ou liquide. Dans tous les cas, le passage de particules chargées entraîne l'émission de lumière visible, dans le cas d'un cristal, ou ultraviolette (UV) dans des matériaux organiques. Dans ce dernier cas, des colorants sont incorporés aux matériaux pour convertir l'UV en lumière bleue visible par fluorescence. La lumière ainsi produite est ensuite guidée vers un tube photomultiplicateur. Celui-ci est formé d'une photocathode enduite d'une mince couche de

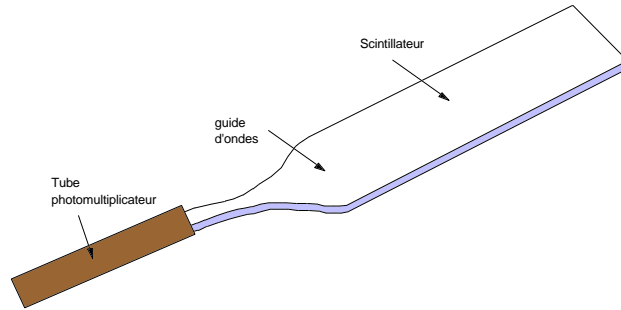


Figure 2.19 Schéma d'un scintillateurs.

métal alcalin. Les photons, en arrivant sur la photocathode, libèrent des électrons par effet photoélectrique. Le signal est alors amplifié en passant par une série d'électrodes pour donner une impulsion électronique rapide (voir figure 2.19).

Le temps de réponse total est très rapide — typiquement de 10 ns — ce qui fait de ces détecteurs des dispositifs de déclenchement idéaux (“trigger”). Un compteur à scintillation typique a des dimensions de  $1\text{m} \times 10\text{cm} \times 1\text{cm}$  et donc une faible résolution spatiale. Une disposition judicieuse de plusieurs de ces détecteurs peut, bien sur, améliorer sensiblement cette résolution.

## Compteur Cerenkov

Lorsqu'une particule chargée traverse un milieu dispersif d'indice de réfraction  $n$  (i.e.  $c_{\text{milieu}} = \frac{c}{n}$ ), des atomes sont excités dans le voisinage de sa trajectoire et de la lumière est émise. Si la vitesse de la particule  $v$  est plus grande que celle de la lumière dans le milieu,  $c_{\text{milieu}} = \frac{c}{n}$ , alors un effet analogue au bang sonique émis par un avion supersonique se produit, c'est-à-dire qu'un front d'onde se forme et se propage à un angle  $\theta$  (voir figure 2.20),

$$\cos \theta = \frac{1}{vn}.$$

C'est ce qu'on appelle l'effet Cerenkov. Les compteurs Cerenkov permettent donc de déterminer la vitesse des particules. On en utilise surtout deux types:

1. Les Cerenkov à seuil, où l'on compte les particules dont la vitesse dépasse une vitesse seuil. Ce seuil peut être ajusté en variant l'indice  $n$  dans les Cerenkov à gaz de pression variable.
2. Les Cerenkov différentiels, qui mesurent directement l'angle  $\theta$  et donc  $v$ .

## Détecteur à rayonnement de transition

Lorsqu'une particule chargée traverse l'interface entre deux milieux de constantes diélectriques différentes, un *rayonnement de transition* est émis. Celui-ci est causé par un changement brusque du champ électromagnétique créé par la charge en mouvement. Cet

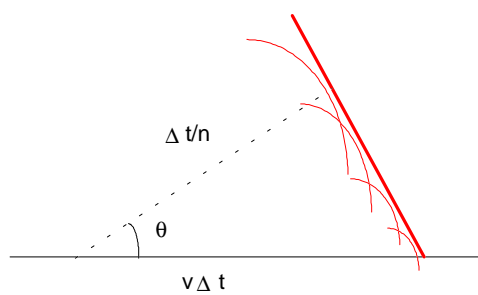


Figure 2.20 Forme du front d'onde dans l'effet Cerenkov.

effet collectif avec le milieu peut être décrit classiquement. L'utilisation du rayonnement de transition dans les détecteurs est possible dans le régime où les particules sont très relativistes, ce qui correspond à des longueurs d'onde du domaine des rayons X.

## Compteur à gerbes et calorimètre

Avec la construction d'accélérateurs de plus en plus puissants, et des particules pouvant atteindre des énergies supérieures à 100 GeV, les méthodes de détection ont du être modifiées. Une technique s'est révélée extrêmement performante dans ce nouveau régime d'énergie: la calorimétrie. Une particule de très haute énergie, lorsqu'elle est absorbée dans un détecteur, produit des particules secondaires qui à leur tour sont absorbées et produisent des particules tertiaires....Presque toute l'énergie de la particule est alors perdue par création de particules (gerbes ou avalanches) jusqu'au moment où l'ionisation ou l'excitation du milieu domine. Il est alors possible d'estimer précisément l'énergie (du moins avec autant de précision que par déflexion magnétique) aussi bien pour des hadrons neutres que pour des particules chargées. Ces détecteurs présentent l'inconvénient d'être destructifs. Par ailleurs, sur un plan plus pratique, ils permettent de mesurer très rapidement l'énergie de la particule initiale et de sélectionner les événements. De plus ils sont particulièrement adaptés à l'étude des *jets*. Il existe deux types de détecteurs de gerbes:

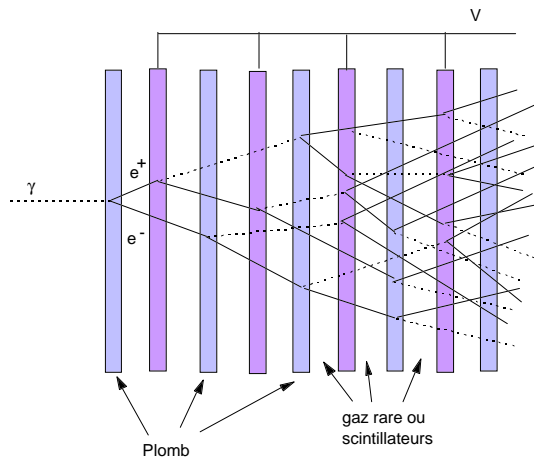


Figure 2.21 Schéma d'un calorimètre électromagnétique.

1. **Détecteurs de gerbes électromagnétiques:** Un détecteur de gerbes électromagnétiques consiste typiquement en une batterie de plaques absorbantes faite d'un matériau lourd (e.g. plomb) entre lesquelles on place un matériau doté de propriétés "acti-

ves” tel que l’argon liquide. Une tension est appliquée entre les plaques et les anodes. Les électrons provenant de l’ionisation sont alors recueillis par les anodes (voir figure 2.21).

2. **Détecteurs de gerbes hadroniques:** Les détecteurs de gerbes sont construits sur un principe similaire mais visent la détection des particules hadroniques qui peuvent être neutres (e.g. neutrons). Il doivent donc être sensibles aux interactions fortes. C’est le seul type de détecteurs qui n’est pas *exclusivement électromagnétique*. En effet, dans le but d’amplifier le signal hadronique notamment dans la détection de neutrons, on utilise souvent des plaques d’uranium dans le détecteur. Lorsqu’un neutron entre en collision avec un noyau d’uranium, il peut y avoir fission du noyau et production de trois neutrons, qui à leur tour, peuvent interagir avec l’uranium et ainsi de suite. Les sections efficaces nucléaires étant plus faibles, les calorimètres hadroniques sont en général plus grands que les calorimètres électromagnétiques.

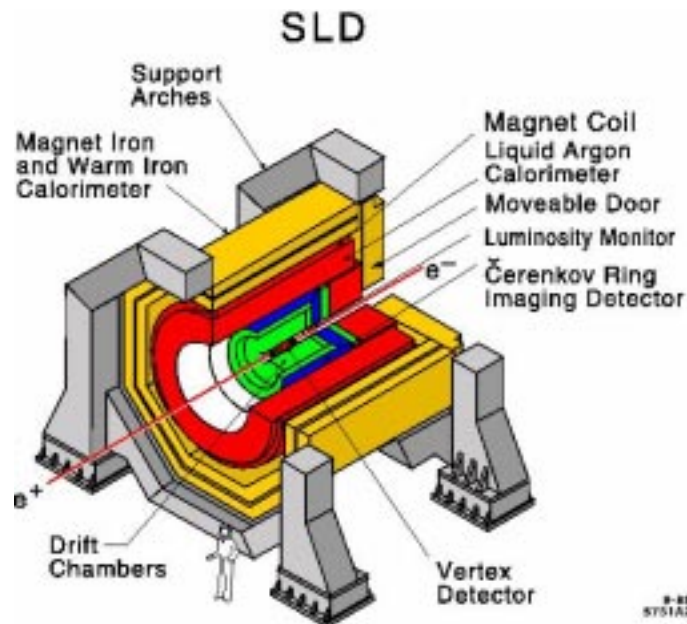


Figure 2.22 Schéma du détecteur SLC utilisé au collisionneur électron-positron du SLAC de Stanford, USA.

## Détecteur hybride

Les détecteurs qui sont décrits plus haut ont des caractéristiques différentes, chacun ayant des forces et des faiblesses. Les grands détecteurs modernes sont en fait des hybrides formés d’un regroupement quelques fois assez imposant (de la hauteur d’un édifice de trois étages) de ces différents appareils, exploitant ainsi chacune de leurs ca-



Figure 2.23 Schéma du détecteur H1 utilisé au collisionneur électron-proton de DESY de Hambourg, Allemagne.

ractéristiques (voir figures 2.22, 2.23, 2.24 et 2.25). La reconstitution des événements est alors prise en charge par l'électronique et les ordinateurs (voir par exemple figures 2.26 et 2.27). Vu la complexité de ces appareils, on a mis au point des programmes de simulation basés sur la génération aléatoire de collisions (simulation Monte Carlo). Ces études permettent de déterminer l'efficacité du détecteur hybride dans une situation réaliste.

De nombreux défis se posent durant la conception et le fonctionnement des détecteurs:

- ▶ **Le déclenchement:** Seulement une faible portion (typiquement 1 sur  $10^5$ ) des collisions sont intéressantes. Il faut donc prévoir des processus de veto rapide pendant les expériences à défaut de quoi il serait nécessaire d'accumuler et d'analyser une banque de données inutilement grande.
- ▶ **Le bruit:** Tout événement est caractérisé par ce qu'on appelle sa signature, c'est-à-dire une combinaison de traces ou particules. Souvent, cette signature peut être imitée par d'autres processus. Il est donc nécessaire d'analyser (par simulation ou autre méthode) quelle portion du signal vient de ce bruit.
- ▶ **Le taux de comptage:** Avant même d'entreprendre l'analyse d'un processus, il faut être en mesure d'estimer son taux de production. Le taux d'un événement par année est en général inacceptable. Celui-ci dépend de la section efficace mais aussi de la luminosité et du temps-machine disponible. Une bonne partie des travaux aux accélérateurs vise d'ailleurs à rehausser le plus possible ces paramètres.
- ▶ **La diminution de la section efficace en fonction de l'énergie:** Typiquement, la





Figure 2.24 Détecteur CDF au Tevatron de Fermilab, Batavia, USA.

section efficace d'un processus exclusif à haute énergie varie selon

$$\sigma \sim \frac{1}{s}.$$

Cela qui implique que plus on sonde profondément la matière, moins les collisions sont fréquentes, i.e. le taux de comptage est plus faible.

- **Les rumeurs et les préjugés:** Finalement, la science étant une entreprise humaine, il faut bien sûr prendre toutes les mesures possibles pour éviter que les préjugés en faveur de telle ou telle théorie ou résultat et les rumeurs de découverte par d'autres groupes n'influencent l'analyse et les conclusions.

## 2.3 Les principales expériences en cours

La situation expérimentale en physique des particules change constamment. Cependant, avec l'arrivée d'accélérateurs de plus en plus grands et des détecteurs de plus en plus complexes, les délais de conception, de construction et de test sont de l'ordre de la dizaine d'années. La liste suivante est un portrait de la situation actuelle mais elle devrait donc aussi être un reflet assez juste pour les quelques années à venir:

Laboratoires et organisations:



**CERN (Centre européen de recherche nucléaire), Genève, Suisse** est le site du collisionneur  $e^+e^-$ , le **LEP** (Large Electron Positron collider) et du futur collisionneur  $p\bar{p}$ , le **LHC** (Large Hadron Collider) → <http://www.cern.ch>



**Fermilab (Fermi National Accelerator Laboratory), Chicago, USA** est le site



Figure 2.25 Détecteur D0 au Tevatron de Fermilab, Batavia, USA.

du collisionneur  $p\bar{p}$ , le **Tevatron**. → <http://www.fnal.gov>



**DESY (Deutsches Elektronen Synchrotron Laboratory), Hambourg, Allemagne** est le site du collisionneur  $e^+e^-$ , **HERA** → <http://www.desy.de>



**SLAC (Stanford Linear Accelerator Laboratory), Californie, USA** est le site du collisionneur  $e^+e^-$ , le **SLC** et de la manufacture de mésons  $B$ , **BaBar** → <http://heplibw3.slac.stanford.edu>



**Particle Data Group** constitue la banque de données la plus complète sur les résultats expérimentaux tels que les tableaux de particules et leurs propriétés, etc... → <http://pdg.lbl.gov/LBL>



**Autres laboratoires** → <http://www.cern.ch/Physics/HEPhtml>

Expériences majeures: Sur les sites internet suivants, on retrouve une description des éléments des expériences en cours (ou projetées) notamment les détecteurs, la physique étudiée, des résultats obtenus, des images d'événements reconstruits certains même en temps réel. Ces expériences sont montées par des grandes collaborations internationales de chercheurs.

Expériences du collisionneur  $e^+e^-$ , le **LEP (Large Electron Positron collider)**, au CERN:



**ALEPH** → <http://alephwww.cern.ch/Public.html>



**DELPHI** → <http://www.cern.ch/Delphi/Welcome.html>



**L3** → <http://hpl3sn02.cern.ch>

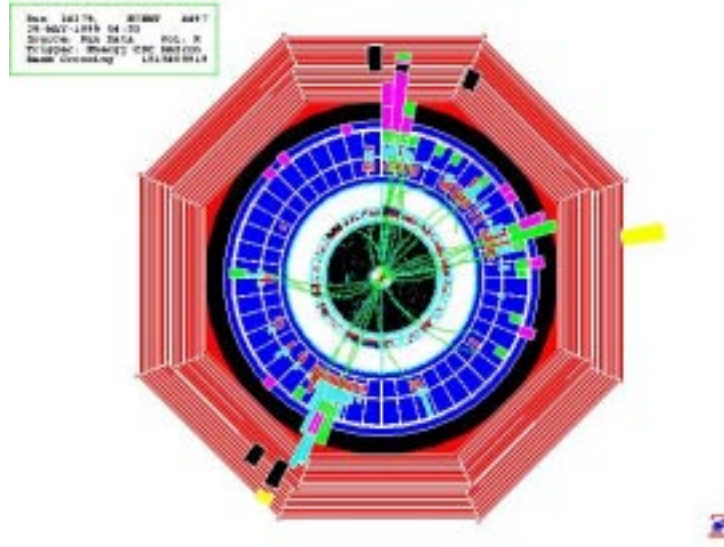


Figure 2.26 Exemple de reconstitution d'événements dans le détecteur SLD.



**OPAL** → <http://www.cern.ch/Opal>

Expériences du collisionneur  $ep$ , **HERA**, à DESY:



**H1** → <http://www-h1.desy.de:80/>



**ZEUS** → <http://www-zeus.desy.de>

Expériences du collisionneur  $p\bar{p}$ , le **Tevatron**, au Fermilab:



**CDF** → <http://www-cdf.fnal.gov>



**D0** → <http://www-d0.fnal.gov/>

Futures expériences du collisionneur  $p\bar{p}$  du **LHC** (Large Hadron Collider), au CERN:



**ATLAS** → <http://atlasinfo.cern.ch/Atlas/Welcome.html>



**CMS** → <http://cmsinfo.cern.ch/cmsinfo/Welcome.html>

et manufacture de  $B$  au collisionneur  $e^+e^-$  du **SLAC**:



**BaBar** → <http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/>

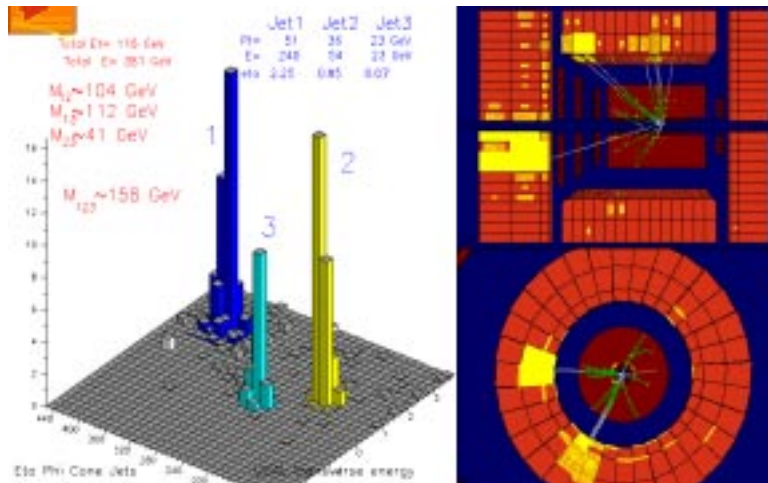


Figure 2.27 Exemple de reconstitution d'événements dans le détecteur ZEUS utilisé dans le projet HERA à DESY, Hambourg, Allemagne.

## 2.4 Problèmes

### 1. Radiation synchrotron

Expliquer pourquoi dans un synchrotron les protons perdent plus d'énergie que les électrons malgré qu'ils aient initialement la même énergie cinétique.

### 2. Particules $\alpha$

Des particules  $\alpha$  ( $N = Z = 2$ ) ayant une énergie de 30 MeV sont extraites d'un synchrotron qui utilise un champ magnétique de 1 T. Calculer le rayon de sortie des particules.

### 3. Collisionneur HERA

Le collisionneur HERA à Hambourg accélère des protons à 820 GeV pour les entraîner dans une collision de front avec des électrons de 30 GeV. Quelle est l'énergie dans le centre de masse d'une telle collision? Pourquoi cette asymétrie dans l'énergie des particules? Quelle énergie serait nécessaire à des protons lancer sur des électrons au repos pour générer la même énergie dans le centre de masse?

### 4. Collisionneur LHC

Au futur collisionneur LHC, on prévoit accélérer des faisceaux de protons à 7 TeV chacun en se servant du tunnel du LEP (circonférence de 27 km). Estimer le champ magnétique nécessaire pour courber la trajectoire des protons dans le tunnel. En supposant que l'accélérateur est formé de 1296 aimants supraconducteurs ayant chacun une longueur de 13.5 m, quel est le champ magnétique dans chaque aimant?

5. **World Wide Web**

Le World Wide Web a été inventé par un employé du CERN. Utiliser les ressources pour répondre aux questions suivantes (indiquer le liens qui vous a servi à répondre)

- (a) Quel est l'origine de l'acronyme LHC?
- (b) Combien y a-t-il d'expériences proposées au LHC?
- (c) Quel est l'origine de l'acronyme OPAL?
- (d) Quel est l'origine de l'acronyme DELPHI?
- (e) Où se trouve le KEK Accelerator Laboratory?
- (f) Quel est le sous-titre du livre publié par R.P. Feynman traitant QED?
- (g) Combien y a-t-il d'états membres du CERN?
- (h) Quand fut annoncée la découverte du quark top?
- (i) Quelle est la masse du top selon la collaboration CDF Collaboration?
- (j) D'où vient le nom: *particule de Higgs*?
- (k) Pourquoi a-t-on attribué le prix Nobel à F.Reines?
- (l) Quel est l'origine de l'acronyme PDG?

6. **Publications importantes**

Les publications suivantes rapportent toutes des découvertes importantes en physique des particules. Dans chaque cas, déterminer la nature de la découverte et expliquer brièvement la signification du titre de la publication.

- (a) *Evidence for anomalous lepton production in  $e^+e^-$  annihilation.* **Physical Review Letters 35**, (1975), 1489.
- (b) *Observation of a hyperon with strangeness minus three.* **Physical Review Letters 12**, (1964), 204.
- (c) *Observation of a narrow charged state at 1876 GeV/ $c^2$  decaying to an exotic combination of  $K\pi\pi$ .* **Physical Review Letters 37**, (1976), 569
- (d) *Discovery of a narrow resonance in  $e^+e^-$  annihilation.* **Physical Review Letters 33**, (1974), 1406.
- (e) *Observation of a dimuon resonance at 9.5 GeV in 400 GeV proton-nucleus collisions.* **Physical Review Letters 39**, (1977), 252.
- (f) *Evidence for planar events in  $e^+e^-$  annihilation at high energies.* **Physics Letters 86B**, (1979), 243.
- (g) *Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at  $\sqrt{s} = 540$  GeV.* **Physics Letters 122B**, (1983), 103.
- (h) *Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around 95 GeV/ $c^2$  at the CERN SPS collider.* **Physics Letters 126B**, (1983), 398.





# 3 DIFFUSION ET INTERACTION ENTRE PARTICULES

La plupart des renseignements sur les propriétés des particules nous proviennent des expériences de diffusion. Ce chapitre décrit les notions élémentaires qui permettent de calculer les sections efficaces et les largeurs de désintégration. Nous introduisons d'abord les principales quantités cinématiques impliquées dans ces interactions. Puis, nous décrivons tour à tour la représentation des interactions, la matrice de diffusion,  $S$  et l'espace de phase, tous des éléments essentiels aux calculs des quantités observables.

## 3.1 Cinématique d'une réaction - Variables de Mandelstam

Les propriétés combinées d'invariance sous une transformation de Lorentz et de conservation de certaines quantités cinématiques s'avèrent très utiles dans l'analyse de la cinématique des processus de diffusion. En effet, dans un processus subatomique, les conditions suivantes sont respectées:

1. On peut définir un ou des invariants de Lorentz i.e. des quantités indépendantes du système de référence (Lab., CM, ...)
2. La quadri-impulsion est conservée dans une réaction.

Mandelstam a défini des variables cinématiques qui combinent ces deux propriétés. Pour une réaction impliquant deux particules initiales et deux particules finales

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (3.1)$$

(voir figure 3.1), on peut définir les trois quantités

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} t &\equiv (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + m_3^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} u &\equiv (p_3 - p_2)^2 = (p_4 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_4 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + m_4^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les variables  $s$  et  $t$  sont respectivement le carré de la somme des énergies initiales

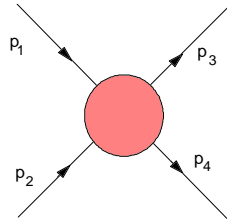


Figure 3.1 Processus à quatre corps.



dans le CM et le carré du transfert d'énergie-impulsion.



### Exemple 3.1

Prouver que:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (3.5)$$

où  $m_i$  = masse de la particule  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Posons dans le CM des particules incidentes

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \quad (3.6)$$

et pour des particules de masses identiques

$$m_i = m \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

$$|\mathbf{p}_1| = k = |\mathbf{p}_2|$$

$$\theta = \text{angle entre } \mathbf{p}_1 \text{ et } \mathbf{p}_3.$$

Alors la variable  $s$  se calcule comme suit

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= (E_1 + E_2)^2 = (2E_1)^2 \\ &= 4(k^2 + m^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

La variable  $t$  est donnée par

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= p_3^2 + p_1^2 - 2p_3 \cdot p_1 \\ &= 2m^2 - 2(E_3 E_1 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1) \\ &= 2m^2 - 2\left(\sqrt{k^2 + m^2} \cdot \sqrt{k^2 + m^2} - k^2 \cos \theta\right) \\ &= -2k^2(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

alors que  $u$  est par symétrie ( $p_1 \leftrightarrow p_2$ )

$$\begin{aligned} u &= (p_3 - p_2)^2 \\ &= -2k^2(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

## Système du centre de masse (4-corps)

On peut établir un certain nombre de relations pour un système à quatre corps (voir figure 3.2). Combinant (3.2) et

$$E_{i\text{CM}}^2 = p_{i\text{CM}}^2 + m_i^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

les quantités dynamiques s'écrivent en terme des variables de Mandelstam:

$$E_{1\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}$$

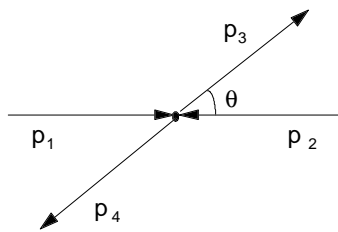


Figure 3.2 Collision dans le repère du centre de masse.

$$E_{2\text{CM}} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}$$

$$p_{\text{CM}} \equiv |\mathbf{p}_{1\text{CM}}| = |\mathbf{p}_{2\text{CM}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (3.10)$$

$$E_{3\text{CM}} = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}$$

$$E_{4\text{CM}} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}$$

$$p'_{\text{CM}} \equiv |\mathbf{p}_{3\text{CM}}| = |\mathbf{p}_{4\text{CM}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (3.11)$$

où

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

## Système du laboratoire (4-corps, cible fixe)

De la même façon, on peut écrire des relations semblables dans système du laboratoire (voir figure 3.3). Dans ce cas, on considère une des particules, la cible, est au repos,

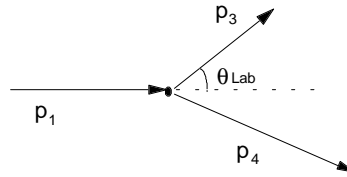


Figure 3.3 Collision dans le repère du laboratoire (cible fixe).

i.e. on peut assigner les impulsions suivantes

$$p_1 = (E_{1\text{Lab}}, 0, 0, p_{1\text{Lab}}) \quad (3.12)$$

$$p_2 = (m_2, 0, 0, 0) \quad (3.13)$$

$$p_3 = (E_{3\text{Lab}}, \mathbf{p}_{3\text{Lab}}) \quad (3.14)$$

$$p_4 = (E_{4\text{Lab}}, \mathbf{p}_{4\text{Lab}}) \quad (3.15)$$

où  $|\mathbf{p}_1| = p_{1\text{Lab}}$  est l'impulsion longitudinale dont la direction coïncide avec l'axe des  $z$ .

Alors

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{1\text{Lab}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_{1\text{Lab}} E_{3\text{Lab}} \end{aligned}$$

$$+2p_{1\text{Lab}} |\mathbf{p}_{3\text{Lab}}| \cos \theta_{\text{Lab}} \quad (3.17)$$

et

$$E_{i\text{Lab}}^2 = p_{i\text{Lab}}^2 + m_i^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Il en découle que

$$E_{1\text{Lab}} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}$$

$$p_{1\text{Lab}} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2m_2}.$$

L'avantage de cette méthode est que puisque les variables de Mandelstam sont des invariants de Lorentz et que l'énergie-impulsion est conservée, il est possible de calculer ces quantités indépendamment du référentiel. Ces relations permettent de plus de calculer l'énergie-impulsion dans dans tout référentiels sans utiliser les transformations de Lorentz.

## La rapidité

La variable de rapidité est souvent utilisée pour représenter le direction d'une particule.

1. Lorsque le mouvement de la particule est identifié au système  $S'$ , i.e. que  $S'$  correspond au système de la particule qui a une vitesse  $\mathbf{V} = V\mathbf{k}$ , alors les transformations de Lorentz nous donnent

$$E' - p'_3 = \lambda(E - p_3)$$

$$E' + p'_3 = \frac{1}{\lambda}(E + p_3)$$

où  $\lambda = \sqrt{\frac{(1+V)}{(1-V)}}$ . Pour la particule au repos dans  $S'$  ( $p'_3 = 0, E' = m$ ), il est possible de récrire  $\lambda$  comme suit

$$\lambda = \frac{E + p_3}{E'} = \frac{E'}{E - p_3}. \quad (3.18)$$

La rapidité est alors

$$\eta = \ln \lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+V)}{(1-V)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\mathbf{p}|}{E - |\mathbf{p}|} \quad (3.19)$$

puisque  $p_3 = |\mathbf{p}|$ . De plus, on a

$$E + |\mathbf{p}| = me^\eta$$

$$E - |\mathbf{p}| = me^{-\eta}$$

$$E = m \cosh \eta$$

$$|\mathbf{p}| = m \sinh \eta. \quad (3.20)$$

2. En général,  $\mathbf{p}$  n'est pas parallèle à l'axe du faisceau (i.e. l'axe  $Oz$ ).

Les composantes perpendiculaire,  $p_T$ , et longitudinale de l'impulsion,  $p_L = p_3$ , de la particule sont alors non-nulles. Il est toutefois possible d'identifier le système  $S'$  avec une composante  $p'_L = p'_3 = 0$  et on aura encore

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{E + p_3}{E - p_3} \\ \eta &= \ln \lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_3}{E - p_3}\end{aligned}\quad (3.21)$$

où cette fois-ci

$$E' = \sqrt{m^2 + p_T^2}.\quad (3.22)$$

L'avantage d'utiliser la variable de rapidité devient évident lorsqu'on effectue une transformation de Lorentz parallèlement à  $\mathbf{p}_L$ . Cette transformation correspond à une différence de rapidité soit

$$\begin{aligned}\eta_b - \eta_a &= \frac{1}{2} \ln \frac{E_b + p_{b3}}{E_b - p_{b3}} - \frac{1}{2} \ln \frac{E_a + p_{a3}}{E_a - p_{a3}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{E_b + p_{b3}}{E_a + p_{a3}} \cdot \frac{E_b - p_{b3}}{E_a - p_{a3}}\end{aligned}\quad (3.23)$$

mais cette différence est une quantité invariante de Lorentz, c'est-à-dire

$$\eta_b - \eta_a = \frac{1}{2} \ln \frac{E'_b + p'_{b3}}{E'_a + p'_{a3}} \cdot \frac{E'_b - p'_{b3}}{E'_a - p'_{a3}}.\quad (3.24)$$

Sous la même transformation, bien sûr, la quantité  $\mathbf{p}_T$  est également invariante.

## 3.2 Les interactions en mécanique quantique

Rappelons quelques notions de mécanique quantique:

- les particules sont représentées par des états  $|\psi\rangle$  et,
- les observables physiques sont des valeurs moyennes d'opérateurs,  $Q$ , qui agissent sur  $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}q &= \langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle \\ &= \int dV \psi^* Q \psi.\end{aligned}$$

où  $dV$  est l'élément de volume.

Considérons alors un processus d'interaction. Celui-ci est caractérisé par:

1. un état initial  $|i\rangle$  qui décrit une ou plusieurs particules dont les impulsions se situent entre  $p_i$  et  $p_i + dp_i$  à un moment  $t \rightarrow -\infty$  (longtemps avant l'interaction à  $t = 0$ ), et,
2. un état final  $|f\rangle$  qui décrit une ou plusieurs particules dont les impulsions se situent entre  $p_f$  et  $p_f + dp_f$  à un moment  $t \rightarrow \infty$  (longtemps après l'interaction).

Le taux de transition est alors donné par:

$$\omega = 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho_f(E_f) \quad (3.25)$$

où  $V$  est l'hamiltonien des interactions, i.e.

$$H = H_0 + V.$$

Ce résultat est valide lorsque  $V$  est suffisamment petit pour être traité comme une perturbation du système dont l'hamiltonien est  $H_0$  ayant des états propres  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$ .  $\rho_f(E_f)$  est la densité d'états finaux, c'est à dire  $\rho_f(E_f)dE_f =$  nombre d'états finaux dont l'énergie se situe entre  $E_f$  et  $E_f + dE_f$ .

On utilise généralement trois points de vue différents pour décrire l'évolution de la valeur moyenne  $q$  dans le temps:

### 1. La description de Schrödinger:

La *description de Schrödinger* consiste à inclure la dépendance temporelle de  $q$  dans l'état  $|\psi\rangle$ . Alors

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi(t)\rangle_S \\ Q &= Q_S \quad \text{indépendant de } t. \end{aligned}$$

L'état  $|\psi(t)\rangle_S$  obéit à l'équation de Schrödinger soit ( $\hbar = 1$ )

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = H |\psi(t)\rangle_S$$

où  $H$  est l'opérateur hamiltonien. Si  $H$  est indépendant du temps, l'équation précédente a pour solution

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_S$$

où l'opérateur d'évolution  $T$  s'écrit

$$T(t, t_0) = \exp(-iH(t - t_0)).$$

### 2. La description des interactions:

La *description des interactions* est plus utile pour décrire les interactions entre particules. Dans ce cas, aussi bien les états  $|\psi(t)\rangle_I$  que les opérateurs peuvent avoir une dépendance temporelle. Le principal avantage de cette description est qu'elle permet de traiter séparément la partie de l'hamiltonien qui causent les interactions ( $V$  dans notre cas). Les représentations des états sont reliées par une transformation unitaire

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S$$

et la dépendance temporelle de l'état  $|\psi(t)\rangle_I$  s'écrit

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -H_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I.$$

Mais

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} &= e^{iH_0 t} (H_0 + V) e^{-iH_0 t} \\ &= e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \\ &= H_0 + e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}. \end{aligned}$$

On définit, dans la description des interactions, l'opérateur  $V_I$  tel que

$$V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= -H_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I \\ &= V_I(t) |\psi(t)\rangle_I. \end{aligned}$$

De façon générale, les représentations des opérateurs sont reliées par la transformation unitaire suivante

$$Q_I(t) = e^{iH_0 t} Q e^{-iH_0 t}$$

avec dépendance temporelle

$$i \frac{d}{dt} Q_I(t) = [Q_I(t), H_0]$$

qui ne dépend que de la partie  $H_0$  de l'hamiltonien.

### 3. La description de Heisenberg:

Finalement, le *description de Heisenberg* choisit d'exclure toute dépendance temporelle de l'état  $|\psi\rangle$ , i.e.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle_H \quad \text{indépendant de } t \\ Q &= Q_H(t). \end{aligned}$$

On note que la valeur moyenne de l'opérateur,  $q$ , doit être la même dans toutes les descriptions, notamment celles de Schrödinger et de Heisenberg. Si on pose que les états  $|\psi(t)\rangle_S$  et  $|\psi\rangle_H$  coïncident dans les deux représentations à l'instant  $t_0$ , i.e.  $|\psi(t_0)\rangle_S = |\psi\rangle_H$  et  $Q_S = Q_H(t_0)$ , il s'en suit que  $q(t)$

$$\begin{aligned} \langle \psi | Q_H(t) | \psi \rangle_H &= \langle \psi(t) | Q_S | \psi(t) \rangle_S = \\ &= \langle \psi(t_0) | T^{-1}(t, t_0) Q_S T(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle_S \\ &= \langle \psi | T^{-1}(t, t_0) Q_H(t_0) T(t, t_0) | \psi \rangle_H. \end{aligned}$$

Donc, la dépendance temporelle de l'opérateur  $Q$  dans la description de Heisenberg s'écrit

$$Q_H(t) = T^{-1} Q_H(t_0) T$$

où ici, pour simplifier,  $T \equiv T(t, t_0)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} Q_H(\mathbf{r}, t) &= i \frac{d}{dt} [T^{-1} Q_H(t_0) T] \\ &= i \left[ \frac{dT^{-1}}{dt} Q_H(t_0) T + T^{-1} Q_H(t_0) \frac{dT}{dt} \right] \\ &= i [i H T^{-1} Q_H(t_0) T - i T^{-1} Q_H(t_0) T H] \\ &= -[H Q_H(t) - Q_H(t) H] \\ &= [Q_H(t), H]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puisque, dans cette description, toute la dépendance temporelle est contenue dans l'opérateur, on conclut que **les quantités conservées sont associées à des opérateurs qui commutent avec l'hamiltonien.**

De façon plus générale, si l'opérateur  $Q$  dépend explicitement du temps dans la re-

présentation initiale, on écrit

$$i\frac{dQ}{dt} = i\frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, H].$$

### 3.3 La matrice de diffusion, $S$

La matrice de diffusion  $S$  est un élément important du traitement quantique des interactions. Considérons un état  $|a\rangle$  qui décrit une ou des particules à un moment  $t_a$  et un état  $|b\rangle$  qui décrit une ou des particules à un moment  $t_b$ . La probabilité de trouver le système dans l'état  $|b\rangle$ , quand le système était dans un état  $|a\rangle$  est donnée par  $|C_{if}(t_b, t_a)|^2$  où

$$C_{fi}(t_b, t_a) = \langle b|U(t_b, t_a)|a\rangle$$

avec  $U(t_b, t_a)$  un opérateur unitaire ( $U^\dagger U = I$ ) puisqu'il décrit l'évolution temporelle de l'état  $|a\rangle$  du moment  $t_a$  au moment  $t_b$  où il prend la forme de l'état  $|b\rangle$ . Cet opérateur vient directement de l'hamiltonien des interactions  $V$  dans

$$H = H_0 + V.$$

Dans les limites respectives  $t_a \rightarrow -\infty$  et  $t_b \rightarrow +\infty$ , les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  redeviennent des états propres de  $H_0$  (e.g. des particules libres) qu'on identifie aux états initial  $|i\rangle$  et final  $|f\rangle$ . On définit alors l'opérateur  $S$  comme la limite

$$S = U(+\infty, -\infty) = \lim_{\substack{t_a \rightarrow -\infty \\ t_b \rightarrow +\infty}} U(t_b, t_a)$$

avec pour éléments de matrice

$$S_{fi} = \langle f|U(+\infty, -\infty)|i\rangle = \langle f|S|i\rangle$$

qui composent ce qui est appelé la matrice de diffusion  $S$ .

La matrice  $S$  est unitaire. Cette importante propriété découle de la conservation de la probabilité. Considérons la probabilité de trouver le système dans n'importe quel état final. Cette quantité doit être l'unité

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_f |C_{fi}(+\infty, -\infty)|^2 \\ &= \sum_f \langle f|S|i\rangle^\dagger \langle f|S|i\rangle \\ &= \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle \\ &= \langle i|S^\dagger S|i\rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation de complétude  $\sum_f |f\rangle \langle f| = I$ .  $S$  est donc unitaire

$$S^\dagger S = I.$$

Il est utile de séparer la matrice de la façon suivante

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} \quad (3.27)$$

$$= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) M_{fi} \quad (3.28)$$



où  $T$  est appelée la matrice de transition.  $P_f$  et  $P_i$  sont les quadri-vecteurs d'énergie-impulsion totale des états final et initial et la fonction- $\delta$

$$\delta^4(P_f - P_i) = \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \delta(E_f - E_i).$$

assure que ces quantités sont conservées dans la diffusion. Dans l'expression (3.27), on peut facilement identifier la composante de  $S_{fi}$  qui laisse l'état initial intact i.e. le premier terme  $\delta_{fi}$ . Par ailleurs, le second terme est responsable des transitions d'un état  $|i\rangle$  vers des états  $|f\rangle$  distincts de  $|i\rangle$  (i.e.  $i \neq f$ ). La probabilité de transition correspondante s'écrit, pour  $i \neq f$ ,

$$\begin{aligned} P &= |C_{fi}(+\infty, -\infty)|^2 \\ &= |\langle f | S | i \rangle|^2 \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(P_f - P_i) \delta^4(0) \sum_f |M_{fi}|^2. \end{aligned}$$

De plus, il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} \delta^4(p) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ip \cdot x} \\ \delta^4(0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{V}t \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume d'intégration. Il en découle que le taux de transition par unité de volume macroscopique est donné par

$$\omega_{fi} = \frac{P}{\mathcal{V}t} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \sum_f |M_{fi}|^2. \quad (3.29)$$

Ce dernier résultat requiert une somme sur les différents états finaux. Il est toutefois nécessaire de pondérer cette somme par l'espace de phase disponible.

## 3.4 Espace de phase

Une particule est décrite par sa position et son impulsion. Or, la probabilité de trouver une particule libre dans un élément de volume de l'espace des positions et des impulsions  $d^6V = d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$  est indépendante de la position et de l'impulsion (invariance de Poincaré). Il en découle que le nombre d'états est proportionnel à l'élément de volume, soit

$$\# \text{ d'états dans } dV = dN = \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (\hbar = 1)$$

Pour le cas de solutions de la forme onde plane (puisque'il s'agit ici de particules libres)

$$\psi = Ae^{ip \cdot x},$$

on peut choisir de normaliser la fonction d'onde de façon que

$$\int d^3\mathbf{x} \psi^* \psi = \int d^3\mathbf{x} |A|^2 = 1$$

sans nuire au caractère général du traitement qui suit.

Après intégration sur les espaces des positions et des impulsions, le nombre d'états

devient

$$\# \text{ d'états} = \int dN = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}.$$

On définit la densité d'états par unité d'énergie,  $\rho(E)$ , comme le nombre d'états ayant une énergie entre  $E$  et  $E + dE$

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{dN}{dE} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d}{dE} \int d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \frac{dp}{dE} \int d\Omega \end{aligned}$$

où  $d\Omega$  est l'élément d'angle solide.

Mais l'élément de volume  $d^3\mathbf{p}$  dans l'espace des impulsions n'est pas un invariant de Lorentz alors que la quantité  $\frac{d^3\mathbf{p}}{E}$  l'est. Considérons plutôt un espace de phase invariant de Lorentz que l'on peut récrire sous la forme

$$\begin{aligned} \int dN &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E(2\pi)^3} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dE}{(2\pi)} \cdot 2\pi\delta(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \theta(E) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où la fonction- $\delta$  reflète la relation masse-énergie pour des particules relativistes et  $\theta$  est la fonction de Heaviside

$$\theta(p_0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } p_0 > 0 \\ 0 & \text{pour } p_0 < 0. \end{cases}$$

Elle assure que seules les configurations ayant une énergie positive contribueront comme il se doit. Cet espace de phase représente la probabilité de trouver une particule libre avec une impulsion entre  $p_\mu$  et  $p_\mu + dp_\mu$ . L'espace de phase (3.30) généralisé à  $n$  particules indépendantes s'écrit alors

$$\begin{aligned} dN_{tot} &= dN_1 dN_2 dN_3 \cdots dN_n \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\delta(p_j^2 - m_j^2) \theta(p_{j0}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

## 3.5 Section efficace

La section efficace est une mesure de la probabilité d'un processus de diffusion. Intuitivement, elle correspond à la surface perpendiculaire au flux des projectiles qui décrit la zone d'interaction autour de la cible. Si l'interaction est plus forte, la zone d'interaction — ou la section efficace — augmente et la probabilité de diffusion en est d'autant plus élevée (voir figure 3.4). L'unité de section efficace couramment utilisée au niveau subatomique est le barn défini comme suit

$$\begin{aligned} 1 \text{ barn} &= 10^{-24} \text{cm}^2 = 10^{-28} \text{m}^2 \\ &= 2568 \text{ GeV}^{-2} \quad (\text{dans les unités naturelles}). \end{aligned}$$

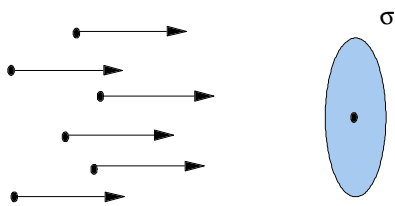


Figure 3.4 La section efficace d'une réaction.

Considérons la diffusion mettant en jeu deux particules initiales et  $n - 2$  particules finales (voir figure 3.5):

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (3.32)$$

Le calcul de la section efficace met en jeu le taux de transition (3.29) pondéré par

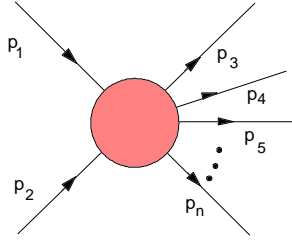


Figure 3.5 Collision de deux particules.

l'espace de phase disponible (3.31). En général, on connaît les énergies et impulsions des particules initiales (e.g. faisceau quasi-monochromatique de particules dans un accélérateur). L'espace de phase pour  $n - 2$  particules finales doit par contre être incluse

$$dN_3 dN_4 \dots dN_n = \prod_{f=3}^n \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0})$$

si bien que le taux de transition *pondéré* est donné par

$$\bar{\omega}_{fi} = \frac{P}{\mathcal{V}t} = (2\pi)^4 \sum_f \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \cdot dN_3 dN_4 \dots dN_n.$$

Pour une densité de flux de particules initiales  $\phi$  (# de particules par unité de temps et de surface), la section efficace différentielle s'écrit

$$d\sigma = \frac{\bar{\omega}_{fi}}{\phi}.$$

Le flux est proportionnel à la vitesse relative projectile-cible, c'est-à-dire

$$|v_1 - v_2| = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|.$$

Dans le système du laboratoire

$$|v_1 - v_2| = \frac{p_{1\text{Lab}}}{E_1} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2m_2 E_1}$$

où  $E_{2\text{Lab}} = m_2$ .

Cependant, le flux, qui s'écrit dans le système du laboratoire  $\phi = 2E_1 \cdot 2E_2 \cdot |v_1 - v_2|$ , est un invariant de Lorentz de la forme

$$\begin{aligned} \phi &= 2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \\ &= 2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \end{aligned}$$

Finalement, la section efficace est donnée par

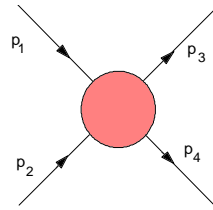
$$\sigma(1+2 \rightarrow 3+4+\dots+n) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}} \int \left[ \prod_{f=3}^n \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2$$

Dans les cas de processus non polarisés, (en général les faisceaux des particules initiales ne sont pas polarisés), on substitue

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow \overline{\sum_i} \sum_f |M_{fi}|^2$$

où  $\overline{\sum_i}$  et  $\sum_f$  signifient respectivement la moyenne sur les états de spin possibles des particules initiales et la somme sur les états de spin des particules finales.

## Diffusion (4-corps)



Processus à quatre corps.

Rappelons les définitions des variables de Mandelstam pour les système à 4 corps:

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2^2 \\ t &\equiv (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + m_3^2 \\ u &\equiv (p_3 - p_2)^2 = (p_4 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_4 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + m_4^2. \end{aligned}$$

Alors la section efficace du processus s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{|\mathbf{p}_{1\text{CM}}|^2} |M_{fi}|^2.$$

Des limites cinématiques s'appliquent: dans le centre de masse,

$$\begin{aligned} t &= (E_{1\text{CM}} - E_{3\text{CM}})^2 - (|\mathbf{p}_{1\text{CM}}| - |\mathbf{p}_{3\text{CM}}|)^2 \\ &\quad - 4|\mathbf{p}_{1\text{CM}}||\mathbf{p}_{3\text{CM}}|\sin^2 \frac{\theta_{\text{CM}}}{2} \\ &= t_0 - 4|\mathbf{p}_{1\text{CM}}||\mathbf{p}_{3\text{CM}}|\sin^2 \frac{\theta_{\text{CM}}}{2} \end{aligned}$$

où  $\theta_{CM}$  est l'angle entre  $\mathbf{p}_{1CM}$  et  $\mathbf{p}_{3CM}$  et

$$t_0 = (E_{1CM} - E_{3CM})^2 - (|\mathbf{p}_{1CM}| - |\mathbf{p}_{3CM}|)^2$$

La variable  $t$  ne peut prendre que des valeurs entre

$$t(\theta_{CM} = \pi) = t_1 \leq t \leq t_0 = t(\theta_{CM} = 0)$$

où

$$t_0(t_1) = \left[ \frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2}{2\sqrt{s}} \right] - (|\mathbf{p}_{1CM}| \mp |\mathbf{p}_{3CM}|)^2.$$

## 3.6 Largeur de désintégration et vie moyenne

Le traitement est similaire pour un processus de désintégration (voir figure 3.6):

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n$$

La mesure de probabilité d'une désintégration s'exprime en terme de sa largeur de

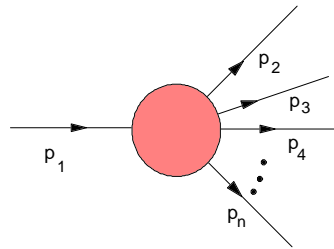


Figure 3.6 Désintégration d'une particule en  $n - 1$  particules finales.

désintégration  $\Gamma$  (voir figure 3.7).

Cette quantité représente la largeur à mi-hauteur du pic dans le spectre d'énergie de la désintégration. L'interprétation physique de cette quantité est directement reliée à l'incertitude dans la mesure de la masse (ou l'énergie) de la particule initiale. On sait que le principe d'incertitude établit un lien entre  $\Delta E$  et  $\Delta t$ , les incertitudes dans la mesure de l'énergie et du temps:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1$$

$$\Gamma \cdot \tau \geq 1$$

Puisque  $\Delta E \approx \Gamma$  et  $\Delta t \approx \tau$ , la vie moyenne de la particule, il est naturel de retrouver la relation

$$\Gamma = \tau^{-1}.$$

La largeur de désintégration  $\Gamma$  est calculée en fonction des éléments de la matrice de transition et de l'espace de phase disponible, i.e.

$$\Gamma = 2m_1 \bar{\omega}_{fi}$$

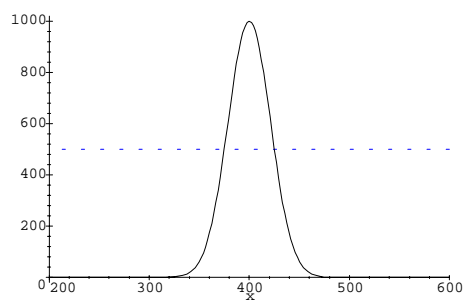


Figure 3.7 Spectre d'énergie des particules finales (les axes sont exprimée en unités arbitraires):  $\Gamma$  représente la largeur à mi-hauteur (trait pointillé bleu) du pic dans le spectre d'énergie de la désintégration (trait noir). Dans ces unités le pic est centré à  $x = 400$  et  $\Gamma$  prends la valeur de 50.

d'où

$$\tau^{-1} = \Gamma(1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{2m_1} \int \left[ \prod_{f=2}^n \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2.$$

Pour des particules non polarisées on substitue  $|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{\sum_i \sum_f |M_{fi}|^2}$  dans l'équation précédente. Cette expression permet de calculer la vie moyenne,  $\tau$ .

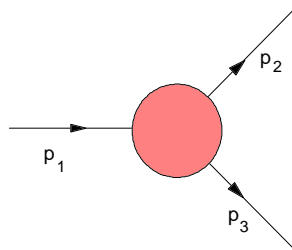
Si une particule de masse  $m_1$  et d'énergie-impulsion  $(E_1, \mathbf{p}_1)$  possède une vie moyenne  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ , alors la probabilité qu'elle survive pendant un temps  $\Delta t$  ou plus est donnée par

$$P(\Delta t) = e^{-\frac{\Gamma \Delta t}{\gamma}} = e^{-\frac{m_1}{E_1} \Gamma \Delta t}$$

et la probabilité qu'elle parcourt une distance  $\Delta x$  ou plus est

$$P(\Delta x) = e^{-\frac{m_1}{|\mathbf{p}_1|} \Gamma \Delta x}.$$

## Désintégration en 2 corps



Dans une désintégration en deux corps la cinématique est très simple:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{m_1^2 - m_3^2 + m_2^2}{2m_1} \\ |\mathbf{p}_2| &= |\mathbf{p}_3| \\ &= \frac{\left[ \left( m_1^2 - (m_2 + m_3)^2 \right) \left( m_1^2 - (m_2 - m_3)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2m_1} \end{aligned}$$

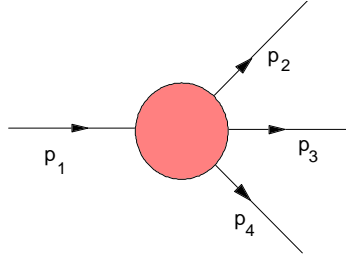
La largeur de désintégration se simplifie pour donner

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_2|}{m_1} |M_{fi}|^2 d\Omega$$

où  $d\Omega_2 = d\varphi_2 d(\cos \theta_2)$  associé à la particule 2.



## Désintégration en 3 corps



Dans une réaction impliquant trois particules finales, l'espace de phase combinée à la fonction- $\delta$  de la matrice de transition donne

$$\bar{N}_{tot} = \int \left[ \prod_{f=2}^4 \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)$$

où  $P_f = \sum_f p_f = p_2 + p_3 + p_4$  et  $P_i = p_1$ .

Posons les invariants

$$s_{24} = (p_2 + p_4)^2, \quad s_{34} = (p_3 + p_4)^2.$$

En insérant les relations

$$1 = \int ds_{24} \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \quad 1 = \int ds_{34} \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2)$$

dans  $\bar{N}_{tot}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \bar{N}_{tot} &= \int \left[ \prod_{f=2}^4 \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \cdot \int ds_{24} \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \int ds_{34} \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2). \end{aligned}$$

Les fonctions- $\delta$  permettent d'intégrer sur les énergies  $p_{20}$ ,  $p_{30}$ , et  $p_{40}$  et sur l'impulsion  $\mathbf{p}_4$ :

$$\begin{aligned} \bar{N}_{tot} &= \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^5 8 E_2 E_3 E_4} \cdot ds_{24} ds_{34} \cdot \delta(E_1 - E_2 - E_3 - E_4) \\ &\quad \cdot \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \\ p_{f0} &= E_f = \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m_f^2}. \end{aligned}$$

Dans le repère du centre de masse,  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $E_1 = \sqrt{s} = m_1$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} d^3 p_2 &= 2\pi |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| d\cos\theta_{23}, \\ d^3 p_3 &= 4\pi |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|, \end{aligned}$$

où  $\theta_{12}$  est l'angle entre  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  et on a intégré sur trois angles dont l'espace de phase

dépend trivialement. L'expression ci-haut devient

$$\bar{N}_{tot} = \int d|\mathbf{p}_2| d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta_{23} \cdot ds_{24} ds_{34} \cdot \frac{|\mathbf{p}_2|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{4(2\pi)^3 E_2 E_3 E_4} \cdot \delta(\sqrt{s} - E_2 - E_3 - E_4) \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2).$$

Utilisant un changement de variables en faveur de  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$ ,

$$d|\mathbf{p}_2| d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta_{23} = J \cdot dE_2 dE_3 dE_4$$

où  $J$  est le Jacobien de la transformation,

$$J = \frac{\partial(|\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}_3|, \cos\theta_{23})}{\partial(E_2, E_3, E_4)} = \frac{E_2 E_3 E_4}{|\mathbf{p}_2|^2 |\mathbf{p}_3|^2}$$

Les intégrales sur  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$  sont triviales et on obtient

$$d\bar{N}_{tot} = \frac{1}{16(2\pi)^3 m_1^2} ds_{24} ds_{34} = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_2 dE_4 \quad (3.33)$$

ou

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|M_{fi}|^2}{32m_1^2} ds_{24} ds_{34} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|M_{fi}|^2}{8m_1} dE_2 dE_4 \quad (3.34)$$

Le dernier résultat est significatif: l'espace de phase est indépendant de  $s_{24}$  et  $s_{34}$ . Donc, à moins qu'il y ait une dépendance explicite de la matrice de transition en fonction de  $s_{24}$  et  $s_{34}$  comme dans le cas de pics à la Breit-Wigner, la distribution des événements suivant les masses invariantes  $s_{24}$  et  $s_{34}$  doit être uniforme.

Par ailleurs, seule une région dans l'espace des  $s_{24}$  et  $s_{34}$  est cinématiquement permise: pour une valeur de  $s_{24}$  donnée,  $s_{34}$  est minimum ou maximum lorsque  $\mathbf{p}_3$  et  $\mathbf{p}_4$  sont parallèles ou anti-parallèles dans le référentiel du CM des particules 2 et 4:

$$s_{34} = (E'_3 + E'_4)^2 - (\mathbf{p}'_3 + \mathbf{p}'_4)^2$$

$$(s_{34})_{\min, \max} = (E'_3 + E'_4)^2 - \left( \sqrt{E_3'^2 - m_3^2} \mp \sqrt{E_4'^2 - m_4^2} \right)^2 \quad (3.35)$$

où  $E'_3$  et  $E'_4$  sont les énergies des particules 3 et 4

$$E'_3 = \frac{m_1^2 - s_{24} - m_3^2}{2\sqrt{s_{24}}} \quad E'_4 = \frac{s_{24} - m_2^2 + m_4^2}{2\sqrt{s_{24}}}. \quad (3.36)$$

(voir figure 3.8)

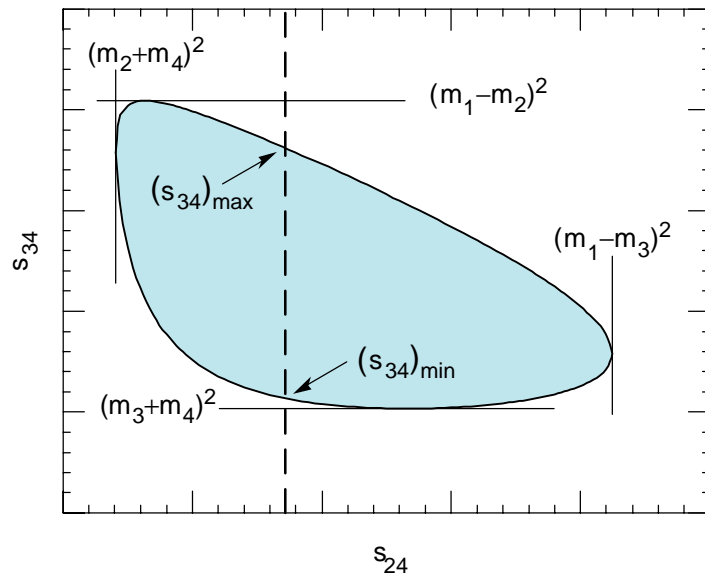


Figure 3.8 Diagramme de Dalitz: espace de phase disponible dans une désintégration à trois corps.

## 3.7 Problèmes

### 1. Variables de Mandelstam

Soit  $s$ ,  $t$  et  $u$ , les variables de Mandelstam dans une réaction  $a + b \rightarrow c + d$ , prouver la relation  $s + t + u = \sum_i m_i^2$  pour le cas général où les masses des particules en jeu,  $m_i$  ( $i = a, b, c, d$ ), sont distinctes.

### 2. Énergie cinétique de seuil

On essaie de produire des particules en utilisant des cibles fixes. Calculer l'énergie cinétique de seuil du projectile,  $K_s$ , nécessaire aux réactions suivantes (Posez  $m_{Z^0} = 91$  GeV,  $m_W = 80$  GeV,  $m_t = 175$  GeV et une masse hypothétique du Higgs de  $m_H = 350$  GeV):

- Production de  $Z^0$ :  $e^+e^- \rightarrow Z^0$ .
- Production de paires  $W^+W^-$ :  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ .
- Production de paires de quarks top:  $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}$ .
- Production de Higgs  $H$ :  $e^+e^- \rightarrow HHHH$ .

### 3. Référentiel du CM

Les expériences précédentes sont en cours dans des collisionneurs de particules ( $e^+e^-$  au LEP et  $p\bar{p}$  au Fermilab) où les deux particules sont accélérées contrairement au cas précédent où la cible était fixe. Le collisionneur est conçu de façon à ce que les particules aient des momenta égaux mais de directions opposées, i.e. l'observateur se trouve dans le référentiel du CM. Calculer l'énergie cinétique de seuil,  $K_s$  associée à chaque particule. Quelle conclusion peut-on tirer de ces deux calculs?

### 4. Vie moyenne

La vie moyenne  $\tau$  des muons est égale à  $2.26 \mu\text{s}$  et leur masse  $m$  est égale à  $106 \text{ MeV}/c^2$ . Avec quelle énergie cinétique doivent-ils être créés à une altitude de  $h = 30$  km pour qu'on en détecte une proportion de 10% à la surface de la mer. (Supposez que les muons arrivent perpendiculairement à la terre).

### 5. Neutrino

Au LEP, on produit un  $Z^0$  d'énergie  $E$  et de quantité de mouvement  $P = |\mathbf{P}|$  qui se désintègre en une paire de neutrinos

$$Z^0 \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e.$$

On observe que le neutrino est émis à un angle  $\theta_L$ , par rapport à la direction de vol du  $Z^0$  qu'on identifie à l'axe des  $z$ . Dans quelle direction  $\theta$  le neutrino est-il émis pour un observateur situé dans le système de référence lié au  $Z^0$  (référentiel du CM du  $Z^0$ )?

### 6. Vitesse du proton

- Calculer la vitesse du proton dont l'énergie cinétique est de 20 MeV, 1 GeV, 840 GeV et 1.8 TeV.
- Combien de temps prend un proton initialement au repos pour parcourir une distance de 3 m dans un tube où on applique un champ électrique uniforme de 10 MV?

7. **Collisionneurs vs cible fixe.**

Expliquer les avantages et inconvénients d'un collisionneurs par rapport à un accélérateur projetant des particules sur cible fixe.

8. **Énergie dans le c.m.**

Calculer l'énergie dans le centre de masse pour l'accélérateur du SLAC et de HERA (voir tableau en appendice).

9. **Énergie cinétique**

Calculer l'énergie cinétique du  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  requise pour que les réactions suivantes soient possibles

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$$

et

$$K^0 + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + K^+$$





## 4 SYMÉTRIES DE L'ESPACE-TEMPS

La première étape de toute analyse scientifique en est une de classification des éléments et des processus que l'on veut décrire. En physique des particules, cette classification a tout d'abord consisté à déterminer lesquels des processus possibles étaient permis et lesquels étaient interdits. Après une étude exhaustive, il fut possible de classifier les particules en leur associant des nombres quantiques et de déterminer des lois de conservation qui devaient (ou non) être respectées durant un processus d'interaction. Par ailleurs, il est important de mentionner que toute classification ou loi de conservation implique la présence de symétries. Ces symétries jouent un rôle crucial dans l'élaboration du Modèle Standard des particules élémentaires.

### 4.1 Symétries en mécanique quantique

Lorsqu'on effectue une transformation physique sur l'appareillage pendant une expérience sur un système, et que le résultat demeure inchangé, on dit que le système étudié est invariant sous cette transformation.

Le traitement de cette transformation en mécanique quantique requiert que celle-ci soit une transformation unitaire. Cette condition est essentielle pour que l'observable, i.e. la valeur moyenne d'un opérateur, reste le même. Par exemple, si la transformation a pour effet de modifier notre perception de l'état initial et final d'un processus, on peut écrire

$$\begin{aligned}|i'\rangle &= U|i\rangle \\ |f'\rangle &= U|f\rangle\end{aligned}$$

où  $U$  représente la transformation unitaire sur les états. La transition de l'état initial à l'état final requiert la matrice- $S$  et, puisque le résultat demeure inchangé, les éléments de matrice sont invariants sous la transformation

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle &= \langle f'|S|i'\rangle \\ &= \langle f|U^\dagger S U|i\rangle\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur de transformation  $U$  commute avec la matrice- $S$

$$[S, U] = 0. \tag{4.1}$$

Comme la matrice- $S$  est relié à l'hamiltonien,  $U$  doit aussi commuter avec ce dernier

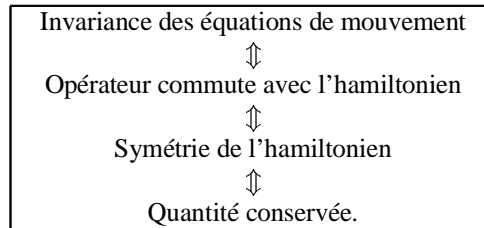
$$[H, U] = 0, \quad (4.2)$$

pour que le système soit invariant. Rappelons l'expression (3.26) qui implique que, si tel est le cas, on peut associer à la transformation  $U$  une quantité conservée. La conclusion précédente peut être formulée sous la forme plus générale du théorème de Noether pour la mécanique quantique:

**Théorème 4.1 Théorème de Noether :**

*À toute transformation qui laisse invariante les équations de mouvement ou autrement dit, qui commute avec l'hamiltonien, on peut associer une quantité conservée.*

Plus schématiquement:



L'opérateur de transformation étant unitaire, il peut s'écrire

$$U = e^{i\varepsilon A}$$

où  $A$  est hermitique. D'autre part, on identifie deux types de transformation et/ou symétrie:

1.  **$U$  est une transformation continue (e.g. translation, rotation):**

On peut, dans ce cas, examiner l'effet d'une transformation infinitésimale ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$U = e^{i\varepsilon A} \simeq 1 + i\varepsilon A.$$

Si la transformation laisse les observables physiques invariante, le commutateur (4.1) entraîne

$$[S, A] = 0$$

ce qui implique que l'observable associée à  $A$  est conservée. Par ailleurs, considérons des états initial et final qui sont des états propres de l'opérateur  $A$

$$\begin{aligned} A|i\rangle &= a_i|i\rangle \\ A|f\rangle &= a_f|f\rangle, \end{aligned}$$

le commutateur  $[S, A]$  étant nul, la valeur moyenne

$$\langle f|[S, A]|i\rangle = 0$$

est aussi nulle, ce qui implique

$$(a_f - a_i) \langle f|S|i\rangle = 0$$

où

$$(a_f - a_i) = 0 \quad \text{si } \langle f|S|i\rangle \neq 0.$$

Autrement dit, les valeurs propres de  $A$  sont conservées durant la transition  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ . L'opérateur  $A$  définit donc une constante du mouvement.



2.  $U$  est une transformation discrète (e.g. parité, conjugaison de charge,...):

Dans ce cas, une action double de l'opérateur de transformation laisse le système invariant, i.e.

$$U^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Si  $U$  a des états propres  $|\psi_U\rangle$  dont les valeurs propres sont définies comme suit

$$U |\psi_U\rangle = \eta_U |\psi_U\rangle$$

$$U^2 |\psi_U\rangle = (\eta_U)^2 |\psi_U\rangle$$

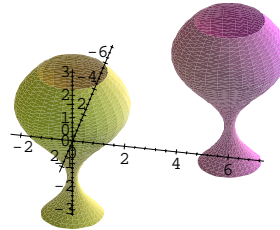
où  $\eta_U$  sont les valeurs propres tel que

$$\eta_U = \pm 1.$$

$U$  est alors hermitique et  $\eta_U$  sont les observables.

La discussion qui précède peut aussi être généralisée aux symétries internes de l'hamiltonien comme nous le verrons plus loin.

## 4.2 Invariance sous une translation



Translation de  $\mathbf{r} = (-5, 5, 0)$ .

Les propriétés d'une particule libre ne dépendent pas de sa position. En effet, les équations de mouvement associées sont invariantes sous une translation. L'effet d'une translation infinitésimale,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ , sur la fonction d'onde est

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \\ &= \psi(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \\ &= \left(1 + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right) \psi(\mathbf{x}) \\ &\equiv D\psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ou  $D$  est l'opérateur infinitésimal (ou le générateur) de la translation

$$D \equiv \left(1 + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right).$$

Une translation finie dans l'espace par  $\Delta \mathbf{x}$  s'obtient par une action répétée de l'opérateur de translation infinitésimale, soit

$$\begin{aligned} D_f &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\Delta \mathbf{x}}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^n \\ &= \exp(-i\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x}) \end{aligned}$$

où  $\Delta \mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \delta \mathbf{x}$  et  $\mathbf{p} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  est donc le générateur de translation. Il en découle que

Invariance sous translation 3D

$$[D, H] = 0 \implies [D_f, H] = 0 \implies [\mathbf{p}, H] = 0$$

$\mathbf{p}$  est une quantité conservée.

Il est facile de généraliser ce résultat à un système invariant sous une translation en quatre dimensions, i.e. dans l'espace-temps, en substituant dans le calcul précédent  $\mathbf{x} \rightarrow x_\mu$  et  $\mathbf{p} \rightarrow p_\mu$ . On obtient

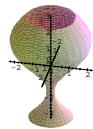
Invariance sous translation 4D

$$[p_\mu, H] = 0$$

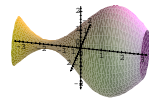
$p_\mu$  est une quantité conservée.

## 4.3 Rotation en trois dimensions

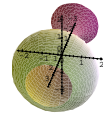
Les figures qui suivent illustrent la rotation d'un objet en 3D. Notons que contrairement à ce qui se passe en 2D, les rotations successives en 3D ne commutent pas.



$\implies$



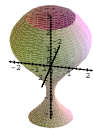
$\implies$



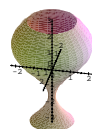
Position originale.

Rotation  $R_x(-\frac{\pi}{2})$ .

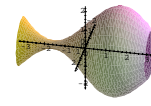
Rotation  $R_z(-\frac{\pi}{2})$ .



$\implies$



$\implies$



Position originale.

Rotation  $R_z(-\frac{\pi}{2})$ .

Rotation  $R_x(-\frac{\pi}{2})$ .

Considérons maintenant un système dont les équations de mouvement sont invariantes sous une rotation. L'effet d'une rotation infinitésimale autour de l'axe des  $z$ , se traduit par le changement de variable  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  (en coordonnées sphériques) dont

dépend la fonction d'onde:

$$\begin{aligned}
 \psi(\phi) \rightarrow \psi'(\phi) &= \psi(\phi + \delta\phi) \\
 &= \psi(\phi) + \delta\phi \cdot \frac{\partial\psi(\phi)}{\partial\phi} \\
 &= \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \psi(\phi) \\
 &\equiv R\psi(\phi)
 \end{aligned}$$

où  $R$  est l'opérateur infinitésimal (ou le générateur) de la rotation

$$R \equiv \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

Une rotation finie dans l'espace par  $\Delta\phi$  s'obtient par une action répétée de l'opérateur de rotation infinitésimale, soit

$$\begin{aligned}
 R_f &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} R^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right)^n \\
 &= \exp(-iJ_z \cdot \Delta\phi)
 \end{aligned}$$

où  $\Delta\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta\phi$ . L'opérateur de moment angulaire,  $J_z = i\frac{\partial}{\partial\phi} = i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est donc le générateur de rotation autour de l'axe des  $z$ . Il en découle que

Invariance sous rotation autour de $Oz$
$\Updownarrow$
$[R, H] = 0 \implies [R_f, H] = 0 \implies [J_z, H] = 0$
$\Updownarrow$
$J_z$ est une quantité conservée.

Un système à symétrie sphérique est invariant sous une rotation autour de n'importe quel axe et par conséquent

Invariance sous rotation arbitraire
$\Updownarrow$
$[\mathbf{J}, H] = 0$
$\Updownarrow$
$\mathbf{J}$ est une quantité conservée.

Il est à noter que  $\mathbf{J}$  est l'opérateur de moment angulaire total. Lorsque le spin d'une particule est non nul

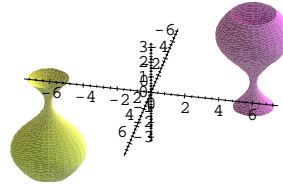
$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

où  $\mathbf{L}$  est le moment angulaire orbital et  $\mathbf{S}$  est celui de spin. L'invariance sous rotation implique la conservation de  $\mathbf{J}$  mais ne signifie pas nécessairement que  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  sont conservés séparément. De plus, en mécanique quantique, toutes les composantes du moment angulaire ne commutent pas entre-elles et donc seulement  $|\mathbf{J}|^2$  et  $J_z$  sont observables simultanément.

## 4.4 Parité

La transformation correspondant à une réflexion dans l'espace,

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x},$$



Réflexion dans l'espace.

définit l'opérateur de parité (unitaire discret) sur une fonction d'onde

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t, -\mathbf{x}).$$

Pour des fonctions propres de  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}\psi_P(t, \mathbf{x}) = \eta_P \psi_P(t, \mathbf{x})$$

où  $\eta_P$  et  $\psi_P$  sont les valeurs et les fonctions propres respectivement. Puisque après deux réflexions

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 \psi_P(t, \mathbf{x}) &= \psi_P(t, \mathbf{x}) \\ &= \eta_P^2 \psi_P(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

les valeurs propres  $\eta_P$  correspondant à la parité prennent les valeurs

$$\eta_P = \begin{cases} +1 & \text{pour } \psi_P(t, \mathbf{x}) \text{ paire} \\ -1 & \text{pour } \psi_P(t, \mathbf{x}) \text{ impaire.} \end{cases}$$

### Remarque 4.1

*En général, la fonction d'onde d'une particule ou d'un système  $\psi(t, \mathbf{x})$  n'est pas une fonction propre de  $\mathcal{P}$  et sa parité n'est pas définie.*

Les quantités ou opérateurs suivants se transforment sous l'opérateur de parité

Quantité	$\mathcal{P}$ (Quantité)
$t$	$t$
$\mathbf{x}$	$-\mathbf{x}$
$\mathbf{p}$	$-\mathbf{p}$
$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$	$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$ .

Les quantités vectorielles qui ne changent pas de signe (e.g.  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{L}$ ,...) sous l'opérateur de parité sont appelées *axiales* ou *pseudo-vecteurs* alors que des quantités scalaires qui changent de signe (e.g.  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}$ ,...) sous l'opérateur de parité sont appelées *pseudo-scalaires*.

Un système (ou des interactions) qui conserve la parité est décrit par un hamiltonien qui commute avec  $\mathcal{P}$ ,

$$[\mathcal{P}, H] = [\mathcal{P}, S] = 0.$$

On observe que la parité est conservée dans les interactions électromagnétique et forte. Par ailleurs, les interactions faibles ne respectent pas cette symétrie.

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, H_{\text{e.m.}}] &= [\mathcal{P}, H_{\text{fortes}}] = 0 \\ [\mathcal{P}, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

## Parité orbitale

Dans le cas d'un atome, d'états liés ou de particules qui interagissent, la fonction d'onde du système  $\psi$  peut être décrite en termes des harmoniques sphériques

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

où

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{(-)^m}{4\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}.$$

Sous réflexion dans l'espace,  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  ou, en coordonnées sphériques

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta - \pi, \phi + \pi)$$

et

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos\theta) &\rightarrow P_l^m(\cos(\theta - \pi)) = (-)^{l+m} P_l^m(\cos\theta) \\ e^{im\phi} &\rightarrow e^{im(\pi+\phi)} = (-)^m e^{im\phi} \end{aligned}$$

si bien que pour les harmoniques sphériques

$$\mathcal{P}Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

le moment angulaire orbital  $l$  de l'état détermine la parité orbitale. Ainsi

$$\eta_P = \begin{cases} +1 & \text{pour des états } l = 0, 2, 4, \dots (\text{i.e. } s, d, g, \dots) \\ -1 & \text{pour des états } l = 1, 3, 5, \dots (\text{i.e. } p, f, h, \dots). \end{cases}$$

## Parité intrinsèque

Indépendamment de la parité orbitale d'un système, chaque particule qui le compose peut posséder une parité intrinsèque si sa fonction d'onde est une fonction propre de l'opérateur de parité (voir table des particules en Appendice). On classe ces particules

selon la nomenclature suivante:

	Spin = 0	Spin = 1
$\eta_P = +1$	scalaire	axiale
$\eta_P = -1$	pseudo-scalaire	vectorielle

Le photon, par exemple, dont la représentation en théorie quantique des champs coïncide avec le concept de potentiel vecteur,  $\mathbf{A}$ , est une particule vectorielle, i.e. de spin 1 et de parité négative.

## Conservation de la parité totale

La parité est un nombre quantique *multiplicatif*. Par cela, on entend que la loi de conservation de la parité s'applique au produit des parités. Pour mettre en lumière cette propriété, il convient d'examiner tout d'abord un système de particules libres. Dans ce cas, l'état initial du système est représenté par le produit

$$|i\rangle = |a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle$$

si bien que si chacune des particules a une parité intrinsèque définie, alors la parité totale,  $\eta_P^i$ , est le produit des parités intrinsèques

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |i\rangle &= \mathcal{P} (|a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle) \\ &= \eta_P^a |a\rangle \cdot \mathcal{P} (|b\rangle \cdots |n\rangle) \\ &= \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n \cdot |a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle \\ &= \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n |i\rangle \end{aligned}$$

ou

$$\eta_P^i = \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n.$$

De la même façon, pour un état final formé de

$$|f\rangle = |p\rangle \cdot |q\rangle \cdots |z\rangle$$

on a la parité totale

$$\eta_P^f = \eta_P^p \eta_P^q \cdots \eta_P^z.$$

La loi de conservation de la parité dans ce cas s'écrit

$$\eta_P^i = \eta_P^f.$$

Par ailleurs, si deux particules interagissent, le mouvement relatif de l'état est décrit par une fonction du type  $R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  dont les propriétés de parité sont décrites plus haut. La parité totale de ce système simple est alors

$$\eta_P^i = (-)^l \eta_P^a \eta_P^b.$$

De façon générale, la parité totale s'écrit

$$\eta_P^{\text{totale}} = \left( \prod_a \eta_P^a \right) \cdot \eta_P^{\text{orbitale}}.$$

Le calcul de la parité orbitale du système,  $\eta_P^{\text{orbitale}}$ , est toutefois plus complexe pour des systèmes de plus de deux particules.

## Parité des antiparticules

Il est facile de démontrer que

$$\begin{aligned}\eta_P(\text{boson}) &= \eta_P(\text{antiboson}) \\ \eta_P(\text{fermion}) &= -\eta_P(\text{antifermion}).\end{aligned}$$

(voir appendice à la page 301 pour plus de détails). Par convention, on choisit  $\eta_P(\text{fermion}) = 1$  et  $\eta_P(\text{antifermion}) = -1$ .

Un état lié fermion-antifermion dans un état avec un moment angulaire orbital  $l_f$  aura une parité

$$\eta_P^{\text{tot}} = (-)^{l_f} \eta_P^f \eta_P^{\bar{f}}.$$

## Exemples



### Exemple 4.1

Le positronium est un état formé d'une paire électron-positron. Il existe sous deux formes: le parapositronium ( $l_f = 0$ ) et l'orthopositronium ( $l_f = 1$ ) dont les parités sont respectivement

$$\begin{aligned}\eta_P^{\text{para}} &= -1 \\ \eta_P^{\text{ortho}} &= +1.\end{aligned}$$



### Exemple 4.2

Les hadrons sont des états liés de quarks. Les mésons sont formés de paires quark-antiquark tel que  $q_i \bar{q}_j$  où  $i, j$  indiquent les saveurs de quarks. Alors, la parité des mésons est donnée par

$$\eta_P^{\text{méson}} = (-)^l \eta_P^q \eta_P^{\bar{q}} = (-)^{l+1}$$

où  $l$  est le moment angulaire orbital entre les quarks. Les mésons les plus légers (basse énergie) ( $l = 0$ ) devraient donc avoir une parité négative ce qui est le cas pour les mésons  $\pi$ ,  $K$ , et  $D$ .

Par ailleurs, les baryons sont des états à trois quarks tel que  $q_i q_j q_k$  dont la parité totale est

$$\eta_P^{\text{baryon}} = (-)^{l_{1,2}} (-)^{l_{12,3}} \eta_P^{q_i} \eta_P^{q_j} \eta_P^{q_k} = (-)^{l_{1,2} + l_{12,3}}.$$

Ici la parité orbitale reçoit deux contributions: la première est due au moment angulaire orbital entre les quarks 1 et 2,  $l_{1,2}$ , et la seconde vient du moment angulaire orbital entre le centre de masse du système formé des quarks 1 et 2 et le quark 3,  $l_{12,3}$ . Les antibaryons  $\bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k$  ont bien sûr la parité

$$\begin{aligned}\eta_P^{\text{antibaryon}} &= (-)^{l_{1,2}} (-)^{l_{12,3}} \eta_P^{\bar{q}_i} \eta_P^{\bar{q}_j} \eta_P^{\bar{q}_k} = (-)^{l_{1,2} + l_{12,3} + 1} \\ &= -\eta_P^{\text{baryon}}.\end{aligned}$$

Les baryons les plus légers ( $l_{1,2} = l_{12,3} = 0$ ) devraient donc avoir une parité positive ce qui concorde avec les observations pour les baryons de spin  $\frac{1}{2}$  tels que  $p$ ,  $n$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda_c$ .



### Exemple 4.3

Considérons un système de deux pions dans des états  $s$  ( $l = 0$ ) et  $p$  ( $l = 1$ ): la parité totale est

$$\begin{aligned}l = 0 : & \quad \eta_P^{\text{totale}} = (-)^l (\eta_P^\pi)^2 = 1 \\ l = 1 : & \quad \eta_P^{\text{totale}} = (-)^l (\eta_P^\pi)^2 = -1.\end{aligned}$$

**Exemple 4.4**

Considérons la réaction suivante impliquant des particules sans spin:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

La conservation de la parité implique alors

$$\eta_P^i = (-)^l \eta_P^1 \eta_P^2 = (-)^{l'} \eta_P^3 \eta_P^4 = \eta_P^f.$$

Si le moment angulaire est conservé dans le processus, alors  $l = l'$  et

$$\eta_P^1 \eta_P^2 = \eta_P^3 \eta_P^4$$

De plus, si les particules initiales sont des particules identiques, par exemple dans la réaction  $\pi + \pi \rightarrow 3 + 4$

$$\eta_P^3 \eta_P^4 = 1$$

et donc seuls deux cas sont possibles

$$\begin{cases} \eta_P^3 = \eta_P^4 = +1 & \text{les états 3 et 4 sont tous deux des scalaires} \\ \eta_P^3 = \eta_P^4 = -1 & \text{les états 3 et 4 sont tous deux des pseudo-scalaires.} \end{cases}$$

## 4.5 Inversion du temps

### L'opérateur d'inversion du temps, $\mathcal{T}$

La transformation d'inversion du temps,  $\mathcal{T}$ , est l'analogie temporelle de la réflexion de l'espace. Elle correspond à regarder un système alors que le temps défile à rebours:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = -t \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} \end{aligned}$$

On définit l'opérateur d'inversion du temps,  $\mathcal{T}$ , sur une fonction d'onde par

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(t, \mathbf{x}) = \mathcal{T}\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(-t, \mathbf{x}).$$

Les quantités ou opérateurs suivants se transforment sous l'opérateur d'inversion du temps

Quantité	$\mathcal{T}(\text{Quantité})$
$t$	$-t$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{p}$	$-\mathbf{p}$
$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$	$-\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{J}, -\mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$

Toutefois, malgré l'analogie entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{P}$ , il est facile de démontrer que  $\mathcal{T}$  ne peut être un opérateur unitaire. La relation de commutation

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (4.3)$$

devient

$$[x_i, p_j] = -i\delta_{ij}$$



sous  $\mathcal{T}$  et n'est donc pas invariante. La transformation  $\mathcal{T}$  ne peut donc pas être unitaire. Ceci a pour conséquence que  $\mathcal{T}$  ne possède pas de valeurs propres et qu'on ne peut y associer des observables.

Redéfinissons  $\mathcal{T}$  en la combinant à une transformation *anti-unitaire* (qui transforme un nombre complexe en son complexe conjugué) tel que

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x_i \rightarrow \mathcal{T}x_i\mathcal{T}^{-1} = x_i \\ p_j \rightarrow \mathcal{T}p_j\mathcal{T}^{-1} = -p_j \\ i \rightarrow -i \end{cases},$$

et que  $\mathcal{T}$  laisse la relation de commutation (4.3) intacte alors cette transformation laisse aussi invariante la relation de commutation

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

puisque

$$\mathcal{T}\mathbf{J}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{J}.$$

L'invariance des interactions sous la transformation  $\mathcal{T}$  implique plus formellement que

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}S\mathcal{T}^{-1} = S$$

et donc que la matrice de transition se transforme comme

$$\mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1} = T^\dagger.$$

Une observable est invariante si

$$\begin{aligned} \langle f(t)|T|i(t)\rangle &= \langle f(t)|\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1})\mathcal{T}|i(t)\rangle \\ &= \langle f(-t)|T^\dagger|i(-t)\rangle^* \\ &= \langle i(-t)|T|f(-t)\rangle. \end{aligned}$$

ce qui décrit exactement les éléments de matrice de transition pour le processus inverse.

La forme exacte de l'expression précédente pour des états initiaux caractérisés par leurs impulsions  $p_i$ , leurs troisièmes composantes de spin  $m_i$  et leurs autres nombres quantiques  $\alpha_i$  et des états finaux caractérisés par leurs impulsions  $p_f$ , leurs troisièmes composantes de spin  $m_f$  et leurs autres nombres quantiques  $\alpha_f$  est

$$\langle p_f, m_f, \alpha_f | T | p_i, m_i, \alpha_i \rangle = \langle -p_i, -m_i, \alpha_i | T | -p_f, -m_f, \alpha_f \rangle \quad (4.4)$$

Il y a donc égalité de probabilité entre un processus et son processus inverse dont les impulsions et les spins sont dans des directions opposées.

Finalement, la transformation  $\mathcal{T}$  n'étant pas unitaire, ceci a pour conséquence que  $\mathcal{T}$  n'a pas de valeurs propres observables. Les états ne peuvent être étiquetés en terme de telles valeurs propres et on ne peut pas tester la violation de l'invariance sous  $\mathcal{T}$  en utilisant la présence de modes de désintégration interdits.

Les interactions fortes sont invariantes sous un renversement du temps  $\mathcal{T}$ :

$$[T, H_{\text{fortes}}] = 0$$

## Application: le bilan détaillé

**Exemple 4.5****Le spin du pion:**

Supposons qu'il y ait invariance sous le renversement du temps,  $T$ , combinée à l'invariance sous la parité,  $\mathcal{P}$ . Pour un système donné, l'identité dérivée en (4.4) devient

$$\begin{aligned}\langle \beta, \mathbf{p}_f, m_f | T | \alpha, \mathbf{p}_i, m_i \rangle &= \langle \alpha, -\mathbf{p}_i, -m_i | T | \beta, -\mathbf{p}_f, -m_f \rangle \\ &= \langle \alpha, -\mathbf{p}_i, -m_i | \mathcal{P}^{-1} T \mathcal{P} | \beta, -\mathbf{p}_f, -m_f \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathbf{p}_i, -m_i | T | \beta, \mathbf{p}_f, -m_f \rangle.\end{aligned}$$

Ces conditions sont remplies pour un processus d'interaction forte par exemple. Alors, la somme sur les états de spin initiaux et finaux est donnée par

$$\sum_{\text{spin}} |\langle \beta, \mathbf{p}_f, m_f | T | \alpha, \mathbf{p}_i, m_i \rangle|^2 = \sum_{\text{spin}} |\langle \alpha, \mathbf{p}_i, m_i | T | \beta, \mathbf{p}_f, m_f \rangle|^2$$

puisque toutes les composantes de spin  $\pm m_i$  et  $\pm m_f$  sont sommées

En général, dans une réaction à 4-corps les particules initiales sont souvent non-polarisées, ce qui implique une moyenne sur les états de spin initiaux si bien que la section efficace du processus direct

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(12 \rightarrow 34) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_1^2 p_{34}}{E_{\text{CM}}^2 p_{12}} \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2$$

Ici, les facteurs  $(2S_1 + 1)$  et  $(2S_2 + 1)$  au dénominateur sont le nombre d'états de spin des particules 1 et 2 respectivement qui apparaissent en prenant la moyenne. La section efficace du processus inverse

$$3 + 4 \rightarrow 1 + 2$$

s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(34 \rightarrow 12) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_1^2 p_{12}}{E_{\text{CM}}^2 p_{34}} \frac{1}{(2S_3 + 1)(2S_4 + 1)} \sum_i \sum_f |M_{if}|^2.$$

Puisque

$$\sum_i \sum_f |M_{fi}|^2 = \sum_i \sum_f |M_{if}|^2$$

on trouve la relation de proportionnalité

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(12 \rightarrow 34) = \frac{p_{34}^2 (2S_3 + 1)(2S_4 + 1)}{p_{12}^2 (2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \frac{d\sigma}{d\Omega}(34 \rightarrow 12).$$

Considérons maintenant la réaction

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d$$

où le spin du proton est  $\frac{1}{2}$  et celui du deutéron est de 1. Alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \rightarrow \pi^+ d) = \frac{p_\pi^2 (2S_\pi + 1) \cdot 3}{p_p^2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi^+ d \rightarrow pp).$$

Une mesure expérimentale des sections efficaces permet alors de déterminer le spin du pion: on vérifie que  $S_\pi = 0$ .

## 4.6 Invariance de jauge

La formulation quantique du principe d'invariance de jauge est due à Wigner (1949).

Cependant, le principe était connu depuis fort longtemps en mécanique classique. En effet, rappelons que les forces électromagnétiques (ou les champs électrique et magnétique,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ ) sont indépendantes du choix de la jauge ce qui n'est pas le cas des potentiels électrostatique et vecteur,  $\phi$  et  $\mathbf{A}$ .

En mécanique quantique, la densité de probabilité est invariante sous la multiplication de la fonction d'onde par un facteur de phase.

Par exemple, la solution sous forme d'une onde plane

$$\psi = e^{ip \cdot x}$$

doit être équivalente à

$$\psi' = e^{-ie\alpha} e^{ip \cdot x} = e^{i(p \cdot x - e\alpha)}.$$

Cette transformation laisse la densité de probabilité spatiale invariante

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle.$$

## Transformation de jauge

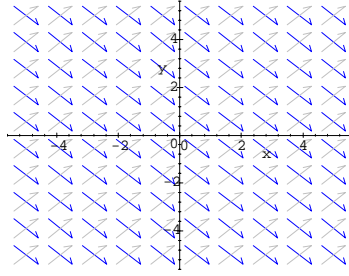
Une transformation de jauge est définie par la transformation unitaire

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ie\alpha} \psi$$

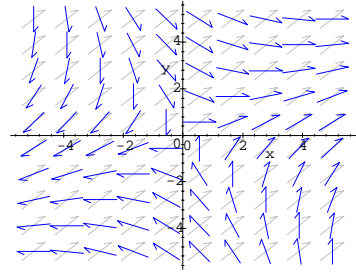
où  $e$  est un paramètre constant dont on verra la signification physique plus bas et  $\alpha(x)$  est une fonction arbitraire:

1. Si  $\alpha(x)$  est une constante arbitraire (indépendante de la position), la transformation de jauge est dite *globale*. Elle consiste à multiplier la fonction d'onde par le même facteur de phase quelle que soit la position. Une phase globale n'est pas observable en mécanique quantique.
2. Si  $\alpha(x)$  est une fonction scalaire arbitraire dépendant de la position, la transformation de jauge est dite *locale*. Elle consiste à multiplier la fonction d'onde par un facteur de phase arbitraire en chaque point de l'espace. L'invariance d'un système sous une telle transformation mène à des propriétés très spéciales qui sont d'une importance cruciale dans la description des théories modernes des particules élémentaires

Par analogie, si on considère la rotation des spins sur un réseau, une rotation *globale* consiste à faire une rotation de tous les spins par le même angle sur chaque site alors que la transformation *locale* fait tourner les spins par un angle arbitraire sur chaque site.



Exemple de rotation globale de spins.



Exemple de rotation locale des spins.

Considérons maintenant l'effet de la transformation de jauge *locale* sur l'hamiltonien. Les équations de mouvement mettent en jeu l'opérateur  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  qui agit de façon non-triviale

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = i(p_\mu - e\partial_\mu \alpha(x)) \psi'(x)$$

alors que

$$\partial_\mu \psi(x) = ip_\mu \psi(x).$$

Donc, les équations de mouvement ne sont pas, en général, invariantes sous une transformation de jauge *locale*. Considérons les particules chargées qui interagissent électromagnétiquement avec le potentiel  $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ . En fait, l'interaction électromagnétique peut être introduite en mécanique grâce à la substitution de l'impulsion par l'impulsion canonique

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + eA_\mu.$$

En incluant le potentiel, une onde plane a la forme

$$\psi(x) = e^{i(p \cdot x + eA \cdot x)}$$

où  $A \equiv A(x)$ . La transformation de jauge a un effet sur  $A$ ,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu,$$

si bien que la fonction d'onde en présence d'interaction sous une transformation de jauge *locale* s'écrit

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i(p \cdot x + eA' \cdot x - e\alpha(x))}$$

et

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = i(p_\mu + eA'_\mu - e\partial_\mu \alpha(x)) \psi'(x).$$

L'invariance de jauge requiert donc que

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

et que les équations de mouvement de  $A_\mu$  soient aussi invariantes sous cette transformation de jauge. Alors

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' \\ \partial_\mu \psi = ip_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi' = ip_\mu \psi' \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu \end{aligned}$$

Finalement, deux conditions sont nécessaires à l'invariance sous une transformation

de jauge *locale*:

1. Il doit exister un champs  $A_\mu$  à longue portée qui agit sur les particules et qui change la phase de leur fonction d'onde.
2. La charge doit être conservée (l'identité ci-haut n'est plus valide si la charge varie en fonction du temps).

## Les photons

Les équations de Maxwell en électrodynamique classique s'écrivent généralement en termes des champs électrique et magnétique

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

En l'absence de charge et courant, elle peuvent prendre la forme

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = 0$$

ou, dans l'espace de impulsions,

$$k_\mu k^\mu A_\nu(k) = 0,$$

ce qui implique que la masse des photons est nulle.

Les équations de mouvement sont invariantes de jauge, ce qui se traduit par la condition de Lorentz (nommée ainsi parce qu'elle est invariante de Lorentz)

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad \text{ou} \quad k_\mu A^\mu(k) = 0.$$

En imposant cette condition sur une solution de type onde plane

$$A^\mu(k) = \epsilon^\mu(k) a_0 e^{ik \cdot x}$$

où  $\epsilon^\mu$  est un vecteur unitaire de polarisation et  $a_0$ , un facteur de normalisation, on a

$$k_\mu \epsilon^\mu(k) = 0. \quad (4.5)$$

En général, seulement trois des quatre degrés de liberté sont indépendants pour une particule vectorielle qui obéit à l'invariance de jauge. Ces particules de spin 1 peuvent alors se trouver dans trois états représentées par les trois états de spin  $J_z = -1, 0$  ou  $1$ .

Les équations de mouvement imposent cependant la contrainte supplémentaire

$$k^2 \epsilon^\mu(k) = 0 \iff k^2 = 0$$

c'est-à-dire que la masse du photon est nulle. Il ne reste que seulement deux degrés de liberté résiduels soit les états de spin  $J_z = \pm 1$ . En fait, il est facile de se convaincre que l'état  $J_z = 0$  n'est pas un invariant de Lorentz alors que le photon devrait être décrit de la même façon quel que soit le repère inertiel (sa vitesse est toujours la même  $c = 1$ ).

Les résultats physiques sont indépendants du choix de la jauge. Choisissons ici la jauge de Coulomb, i.e.

$$A^0 = \phi = 0.$$

Alors (4.5) devient

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

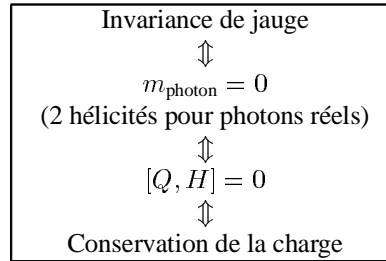
aussi appelée la condition de transversalité

$$\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\epsilon}$$

i.e. seules les composantes transverses du vecteur de polarisation sont non-nulles pour un photon.

En conclusion, les implications sont les suivantes:

1. Le vecteur de polarisation d'une particule de spin 1 possède en général trois états: les états de spin  $J_z = \pm 1, 0$ . L'invariance de Lorentz (ou la masse du photon nulle) élimine la possibilité  $J_z = 0$ .
2. Un photon peut ne pas obéir aux équations de mouvement ou à la condition d'invariance de jauge pendant un temps permis par le principe d'incertitude. On dit que le photon est alors *virtuel*.
3. L'invariance de jauge  $\implies m_{\text{photon}} = 0 \implies$  conservation de la charge  $\implies$  2 hélicités pour photons réels.



## 4.7 Problèmes

### 1. Fermions et bosons

Classifier les particules suivante suivant qu'elles sont des fermions ou des bosons:

- (a)  $D^-$  méson,
- (b) photon,
- (c)  $\tau^-$ ,
- (d) quark bottom,
- (e)  $W^+$ ,
- (f) baryon  $\Lambda^0$

### 2. Parité

- (a) Démontrer que l'état formé de  $2\pi^0$  est pair sous une réflexion ( $(\eta_P = 1)$ ).
- (b) Expliquer pourquoi le  $K^0$ , dont la parité est impaire ( $\eta_P = -1$ ), ne peut se désintégrer en  $2\pi^0$ .

### 3. Une collision $\bar{p}p$

Considérons des produits de désintégration suite à une collision  $\bar{p}p$  dont l'état final est l'état  $s$  au repos. Alors la collision  $\bar{p} + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0$  se produit par l'entremise de quelle type d'interaction et pourquoi?

### 4. Le méson $\eta(549)$

Le méson  $\eta(549)$  ayant un spin  $J = 0$ , et se désintègre via les interactions électromagnétiques suivant

$$\begin{aligned}\eta &\rightarrow \gamma + \gamma, \\ \eta &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \\ \eta &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-.\end{aligned}$$

Trouver les parité spatiale et parité de charge de  $\eta$ . Expliquer pourquoi la désintégration électromagnétique  $\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0$  n'est pas observée

### 5. Modèle des quarks

Dans le modèle des quarks l'octet de mésons possède un spin et une parité  $J^P = 0^-$  et  $J^P = 1^-$ . Expliquer. Comment peut-on construire un multiplet ayant  $J^P = 0^+$ ? Trouver la parité de charge de chacun de ces multiplets

### 6. Valeur propre de CP

Étant que les valeurs propres de CP  $K_1$  and  $K_2$  sont

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

exprimer  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  en termes de  $K_1$  et  $K_2$ .

Un faisceau de  $K^0$  peut se désintégrer dans le vide. À une distance en aval du faisceau correspondant à vingt fois la vie moyenne du  $K_1$  se trouve une cible qui absorbe 10% des  $K^0$  incidents. Si la section efficace du  $\bar{K}^0$  est trois fois plus élevée que celle du  $K^0$ , calculer les amplitudes relatives du  $K_1$  et du  $K_2$  dans le faisceau (a) au début, (b) juste avant d'arriver sur la cible et (c) juste après avoir traverser la cible.





# 5 SYMÉTRIES INTERNES ET HADRONS

## 5.1 Symétries globales et règles de sélection

On observe expérimentalement que certaines réactions sont possibles alors que d'autres semblent totalement interdites. Pourtant, la seule conservation d'énergie-impulsion n'arrive pas à expliquer ces résultats.

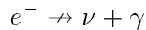
Par exemple, le simple principe de l'augmentation de l'entropie favorise la désintégration d'une particule en particules plus légères. Dans une telle désintégration, l'entropie augmente puisqu'elle est reliée à l'espace de phase,  $S = k_B \ln(\text{Espace de phase})$  qui est plus grande pour des particules légères. Cependant certaines désintégrations ne sont pas observées.

Il doit donc y avoir un principe théorique qui explique ces phénomènes, e.g. des règles de sélection ou encore des lois de conservation. Dans la plupart des cas, ceci est possible en introduisant une charge généralisée (un nombre quantique associé à une symétrie globale) à chacune des particules et une loi de conservation additive correspondante. Alors, la somme des charges généralisées demeure la même avant et après la réaction:

$$\sum_i Q_i = \sum_f Q_f.$$

### Charge électrique, $Q$

La charge électrique est conservée à l'échelle macroscopique. Il est donc naturel qu'elle soit conservée aussi à l'échelle microscopique. Cependant, cette présomption doit être scrupuleusement vérifiée. En principe, l'électron pourrait se désintégrer en particules plus légères si ce n'était de la conservation de la charge électrique. On sait que le processus de désintégration



possède une vie moyenne  $\tau \geq 2 \times 10^{22}$  années (il n'est essentiellement pas observé). La charge électrique est donc un nombre quantique conservé additivement. Cela implique

l'invariance sous une transformation de jauge globale de l'hamiltonien

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iQ\alpha} |\psi\rangle$$

et

$$[Q, H] = 0$$

où  $Q$  est le générateur du groupe d'une transformation unitaire  $U(1)$ . Si  $\alpha$  est indépendant de la position, on dit que la transformation de jauge est globale alors que pour  $\alpha = \alpha(x)$ , la transformation de jauge est locale. Une des particularités de la charge électrique est qu'elle est le seul nombre quantique qui correspond à la fois au générateur de la transformation  $U(1)$  globale et au générateur de la transformation  $U(1)$  locale.

## Nombre leptonique total, $L$

Le Modèle Standard requiert la présence de trois générations (ou familles) de leptons. Chaque génération est formée d'un lepton chargé et d'un neutrino (et de leurs antiparticules respectives). Les réactions impliquant des leptons permettent de constater qu'il y a conservation du *nombre leptonique* si on assigne un nombre leptonique,  $L = 1$ , aux leptons,  $L = -1$  aux antileptons et  $L = 0$  à toute autre particule (e.g. hadrons, quarks,...)

$$\begin{array}{c} \text{Leptons, } L = 1 \\ \hline \hline \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \\ \hline \hline \text{Antileptons, } L = -1 \\ \hline \hline \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix} \end{array}$$

La conservation du nombre leptonique implique l'invariance de l'hamiltonien sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iL\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[L, H] = 0$$

où  $L$  est le générateur de la transformation.

## Nombre électronique, muonique, tauonique...

Toutefois la simple conservation du nombre leptonique total ne réussit pas à expliquer l'observation suivante. Lorsque des antineutrinos provenant de la désintégration du pion



entrent en collision avec un proton, la réaction



n'est pas observée. Par ailleurs, la réaction est possible si les antineutrinos incidents sont de type électronique,



Pourtant, la seule loi de conservation du nombre leptonique total permet la capture d'antineutrinos de tous les types dans (5.2).

Historiquement, cette question a permis de faire la lumière sur la nature des neutrinos en nous obligeant à en distinguer différents types et à attribuer à chaque famille de leptons un nombre leptonique distinct. Ainsi, chaque nombre leptonique (les nombres électronique, muonique et taonique) est conservé séparément. On assigne les nombres leptoniques suivant la règle

	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	$L$
$e^-, \nu_e$	+1	0	0	+1
$e^+, \bar{\nu}_e$	-1	0	0	-1
$\mu^-, \nu_\mu$	0	+1	0	+1
$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	0	-1	0	-1
$\tau^-, \nu_\tau$	0	0	+1	+1
$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	0	0	-1	-1

les autres particules ayant toutes des nombres leptoniques nuls.

On voit aisément que les nombres électronique et muonique ne sont pas conservés dans la réaction  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$ :

$$L_e(\bar{\nu}_\mu) + L_e(p) = 0 \rightarrow L_e(n) + L_e(e^+) = -1$$

$$L_\mu(\bar{\nu}_\mu) + L_\mu(p) = -1 \rightarrow L_\mu(n) + L_\mu(e^+) = 0$$

alors qu'ils le sont dans la réaction  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ :

$$L_e(\bar{\nu}_e) + L_e(p) = -1 \rightarrow L_e(n) + L_e(e^+) = -1$$

$$L_\mu(\bar{\nu}_e) + L_\mu(p) = 0 \rightarrow L_\mu(n) + L_\mu(e^+) = 0.$$

## Nombre baryonique, $B$

Le proton est une particule très stable avec une vie moyenne  $\tau \geq 10^{31}$  années. Or, à prime abord, on pourrait s'attendre à ce que le proton puisse se désintégrer en une particule plus légère. Ce n'est pas le cas. Cette observation suggéra que la stabilité devait être la conséquence d'une loi de conservation d'un nouveau nombre quantique, le nombre baryonique. On assigne un nombre baryonique  $B = +1$  aux baryons et  $B = 0$  aux mésons et aux leptons. Les antibaryons ont bien sûr une charge opposée, soit  $B = -1$ :

$$B = +1 : p, n, \Lambda, \Sigma^{+, -, 0}, \Xi^{0, -}, \Omega^{-}, \dots$$

$$B = 0 : \pi^{+, -, 0}, K^{-, +, 0}, \rho, \dots$$

Par ailleurs, les constituants des hadrons, les quarks, doivent aussi porter une charge baryonique

$$B(\text{quark}) = \frac{1}{3}$$

$$B(\text{antiquark}) = -\frac{1}{3}$$

qui est indépendante de la saveur.

La conservation du nombre baryonique implique l'invariance de l'hamiltonien sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iB\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[B, H] = 0$$

où  $B$  est le générateur de la transformation.

## 5.2 Isospin

Comme une bonne partie de ces règles de sélection s'appliquent aux hadrons qui sont formés de particules plus fondamentales, les quarks, nous commençons cette section par un survol rapide des propriétés des hadrons. Malgré qu'il en existe plusieurs centaines, on peut les classer en deux types: les baryons de spin  $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  et les mésons de spin  $J = 0, 1, \dots$ . De plus, les hadrons peuvent être rangés en groupes définis, des multiplets qui sont identifiés par des parités et spins identiques,  $J^P$ . Les tableaux suivants illustrent le spectre des hadrons les plus légers (des états plus lourds existent mais sont interprétés comme des états excités).

**Multiplet  $J^P = 0^-$**

Mésons	Mass(MeV)	Nom
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	139.6, 135.0, 139.6	pion
$K^+, K^0$	493.7, 497.7	kaon
$\bar{K}^0, K^-$	497.7, 493.7	antikaon
$\eta$	547.5	eta
$\eta'$	957.8	eta prime

**Multiplet  $J^P = 1^-$**

Mésons	Mass(MeV)	Nom
$\rho^+, \rho^0, \rho^-$	768.5	rho
$\omega$	781.9	oméga
$K^{*+}, K^{*0}$	891.6, 896.1	kaon étoile
$\bar{K}^{*0}, K^{*-}$	896.1, 891.6	antikaon étoile
$\phi$	1019.4	phi

**Multiplet  $J^P = \frac{1}{2}^+$**

Baryons	Mass(MeV)	Nom
$p, n$	938.3, 939.6	nucléon
$\Lambda$	1115.7	lambda
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1189.4, 1192.6, 1197.4	sigma
$\Xi^0, \Xi^-$	1314.9, 1321.3	xi

Multiplet $J^P = \frac{3}{2}^+$		
Baryons	Mass(MeV)	Nom
$\Delta^+, \Delta^0, \Delta^-, \Delta^{--}$	$\approx 1232$	delta
$\Sigma^{*+}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*-}$	1382.8, 1383.7, 1387.2	sigma étoile
$\Xi^{*0}, \Xi^{*-}$	1530.8, 1535.0	xi étoile
$\Omega^-$	1672.5	oméga

La première remarque qui vient à l'idée en regardant les propriétés des particules formant les multiplets  $J^P$  est sans doute que la structure de multiplets ne s'arrête pas à la notion de spin et parité. En effet, la plupart des particules peuvent former des sous-multiplets caractérisés par des masses très semblables mais dont les éléments se distinguent par leur charge électrique. Par exemple, on retrouve des singulets, doublets, triplets et quadruplets de charges, e.g.:

$$\begin{array}{l}
 \text{singulets:} \quad \eta, \eta', \omega, \phi, \Lambda, \Omega^{--} \\
 \text{doublets:} \quad \left( \begin{array}{c} p \\ n \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} K^+ \\ K^0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \bar{K}^0 \\ K^- \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} K^{*+} \\ K^{*0} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \bar{K}^{*0} \\ K^{*-} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{array} \right) \\
 \text{triplets:} \quad \left( \begin{array}{c} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^- \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \Sigma^{*+} \\ \Sigma^{*0} \\ \Sigma^{*-} \end{array} \right) \\
 \text{quadruplets:} \quad \left( \begin{array}{c} \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \\ \Delta^+ \end{array} \right)
 \end{array}$$

On remarque de plus que les interactions fortes sont approximativement identiques pour les systèmes  $p - n$ ,  $p - p$  et  $n - n$ . Par analogie avec le concept de spin (où la troisième composante du spin distingue les deux manifestations d'une même particule) il est possible d'interpréter le proton et le neutron comme les deux éléments d'un doublet d'isospin (nucléon)

$$N = \left( \begin{array}{c} p \\ n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2} \\ I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Le proton et le neutron sont donc des particules identiques (ou la même particule) du point de vue des interactions fortes. Leurs masses diffèrent très peu,

$$\frac{\Delta m}{\bar{m}} = \frac{1.2 \text{ MeV}}{939 \text{ MeV}} = 0.001,$$

et cette différence peut être attribuée à des effets coulombiens qu'on estime être de l'ordre de la constante de couplage des interactions électromagnétiques,  $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ .

Il s'agit toutefois d'une propriété qui ne se limite pas au proton et au neutron mais qui s'étend à toutes les interactions fortes, c'est-à-dire que celles-ci sont indépendantes de la charge électrique.

Le traitement de l'isospin ressemble en tout point à celui du moment angulaire. On introduit un vecteur  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$  dans l'espace des isospins. L'opérateur d'isospin  $\mathbf{I}$  obéit à des règles de commutation similaires à celles qui s'appliquent au moment angulaire ou au spin,

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \quad i = 1, 2, 3$$

ce qui permet l'existence simultanée de plusieurs états propres  $|I, I_3\rangle$  avec pour observables  $\mathbf{I}^2$  et  $I_3$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^2 |I, I_3\rangle &= I(I+1) |I, I_3\rangle \\ I_3 |I, I_3\rangle &= I_3 |I, I_3\rangle\end{aligned}$$

où  $I_3$  dans le membre de gauche de la dernière équation représente un opérateur.  $I_3$  possède  $(2I+1)$  valeurs propres qui prennent les valeurs

$$-I, -I+1, \dots, I-1, I.$$

Par conséquent, un multiplet d'isospin  $I$  est formé de  $(2I+1)$  états propres, i.e. il s'agit d'un  $(2I+1)$ -plet.

Par exemple, le multiplet formé du proton et du neutron possède deux états de charge d'où  $I = \frac{1}{2}$  et

$$\begin{aligned}|p\rangle &= \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |n\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,\end{aligned}$$

alors que le quadruplet du  $\Delta$  possède les états propres

$$\begin{aligned}|\Delta^+\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ |\Delta^0\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |\Delta^-\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\Delta^{--}\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$

## Symétrie SU(2)

On peut donc décrire plusieurs états de charge d'une particule sous la forme de multiplets. Ces états ont les mêmes interactions fortes. On peut dire que l'hamiltonien des interactions fortes est invariant sous une transformation qui change un état de charge pour un deuxième qui fait partie du même multiplet, e.g. transformation d'un proton en neutron. Mais comment définit-on une telle transformation? Encore une fois, l'analogie avec le spin est d'une grande utilité.

Posons un opérateur de transformation  $U$  tel que

$$|\phi'\rangle = U |\phi\rangle.$$

où  $|\phi\rangle$  représente le multiplet d'isospin.

1. Puisque  $U$  agit sur un multiplet, il peut être représenté par une matrice qui est complexe en général.

2. Pour conserver l'hermiticité et générer des valeurs propres réelles,  $U$  doit être unitaire,

$$U^\dagger U = I.$$

3. On exige en plus que le produit scalaire soit conservé, e.g.

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi' | \phi' \rangle$$

ce qui implique que

$$\det U = 1.$$

4. Finalement, l'état de charge à l'intérieur d'un multiplet est déterminé par un seul nombre quantique  $I_3$ . Ceci implique qu'il existe une seule matrice diagonalisable simultanément. On dit alors que le rang de l'opérateur matriciel est de un.

Les matrices qui obéissent à ces conditions forment le groupe  $SU(2)$ , les matrices  $2 \times 2$  spéciales unitaires.

## Générateurs de $SU(2)$

Puisque  $U$  est unitaire, il peut se récrire

$$U = e^{i\omega}$$

où  $\omega$  est une matrice complexe  $2 \times 2$ . Elle est déterminée par 8 paramètres, 4 réels et 4 imaginaires. Cependant, tous ces paramètres ne sont pas indépendants puisque les 4 conditions d'unitarité s'appliquent ( $U^\dagger U = I$ ) et une condition d'unimodularité ( $\det U = 1$ ) doit aussi être imposée. Il reste donc trois degrés de liberté indépendants ce qui signifie que  $\omega$  est une combinaison linéaire de trois matrices linéairement indépendantes.

$$\omega = \omega^i \sigma_i \quad i = 1, 2, 3$$

où  $\omega^i$  sont de coefficients alors que  $\sigma_i$  sont les matrices  $2 \times 2$  linéairement indépendantes.

Il est pratique d'identifier  $\sigma_i$  au générateur du groupe  $SU(2)$ , c'est-à-dire aux matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui obéissent aux règles de commutation

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad i = 1, 2, 3.$$

À noter, les générateurs ne commutent pas. On dit alors que le groupe  $SU(2)$  est non-commutatif ou non-abélien.

## Relation de Gell-Mann-Nishijima

Par analogie avec le spin, il est clair que la conservation de  $I_3$  implique l'invariance de l'hamiltonien sous une rotation autour de la troisième direction d'isospin. Par ailleurs, la valeur propre  $I_3$  est une mesure de l'état propre de charge de la particule à l'intérieur

du multiplet. Il doit donc exister une relation directe entre la charge et la troisième composante d'isospin de l'état. On serait tenté de confondre les deux quantités mais il faut se rappeler que la charge  $Q$  est conservée partout alors que  $I_3$  ne l'est que dans les interactions fortes. En fait, d'autres charges sont impliquées dans la relation entre  $Q$  et  $I_3$ ,

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

où  $Y$  est appelé l'*hypercharge*. Il est facile de démontrer que l'*hypercharge* associée à un multiplet d'isospin correspond à la charge moyenne des particules qui forment le multiplet

$$Y = 2\bar{Q}.$$

## Conservation d'isospin

La conservation de l'isospin implique l'invariance de équations de mouvement sous une rotation dans l'espace des isospins et les règles de commutation

$$\begin{aligned} [U, S_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [U, H_{\text{fortes}}] &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}, S_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\mathbf{I}, H_{\text{fortes}}] &= 0. \end{aligned}$$

Pendant comme dans le cas du moment angulaire ou du spin, seulement deux opérateurs matriciels commutent simultanément entre eux et avec  $H_{\text{fortes}}$ ,

$$[\mathbf{I}^2, I_3] = [\mathbf{I}^2, H_{\text{fortes}}] = [I_3, H_{\text{fortes}}] = 0,$$

et il existe donc seulement deux bons nombres quantiques qui décrivent les états d'isospin et, puisqu'ils sont conservés, ils mènent aux règles de sélections suivantes dans les interactions fortes:

$$\begin{aligned} \Delta |\mathbf{I}|^2 &= 0 \\ \Delta I_3 &= 0 \end{aligned}$$

qui viennent s'ajouter aux règles déjà décrites

$$\begin{aligned} \Delta B &= 0 \quad \text{et} \\ \Delta Q &= 0 \Rightarrow \Delta Y = 0. \end{aligned}$$

La combinaison de deux ou plusieurs isospins est analogue à celle de spins. Posons deux états d'isospin  $|I^a, I_3^a\rangle$  et  $|I^b, I_3^b\rangle$ . Ils se combinent selon les règles suivantes

1. L'isospin total  $I$  prend des valeurs

$$|I^a - I^b|, |I^a - I^b| + 1, \dots, |I^a + I^b| - 1, |I^a + I^b|$$

2. La troisième composante d'isospin est conservé additivement

$$I_3 = I_3^a + I_3^b.$$



Plus précisément, l'état final est une combinaison linéaire de tous ces états

$$\begin{aligned} |I^a, I_3^a; I^b, I_3^b\rangle &= |I^a, I_3^a\rangle \otimes |I^b, I_3^b\rangle \\ &= \alpha ||I^a - I^b|, I_3^a + I_3^b\rangle + \beta ||I^a - I^b| + 1, I_3^a + I_3^b\rangle \\ &\quad + \cdots + \gamma ||I^a + I^b|, I_3^a + I_3^b\rangle \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des coefficients de Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle |I^a - I^b|, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle \\ \beta &= \langle |I^a - I^b| + 1, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle \\ &\quad \vdots \\ \gamma &= \langle |I^a + I^b|, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle. \end{aligned}$$

Les interactions électromagnétiques brisent la symétrie sous la rotation dans l'espace des isospin,

$$[\mathbf{I}, H_{\text{e.m.}}] \neq 0.$$

Toutefois on a que

$$[I_3, H_{\text{e.m.}}] = 0.$$

L'hamiltonien électromagnétique conserve donc la troisième composante de l'isospin  $I_3$ . En utilisant

$$[Q, H_{\text{e.m.}}] = 0$$

on déduit que (relation Gell-Mann-Nishijima)

$$[Y, H_{\text{e.m.}}] = 0.$$

On a finalement les règles de sélections pour les interactions électromagnétiques suivantes

$$\begin{aligned} \Delta I_3 = 0 \quad \Delta B = 0 \quad \Delta Y = 0 \\ \Delta |\mathbf{I}|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Les interactions faibles, pour leur part, ne conservent ni  $I_3$ , ni  $\mathbf{I}^2$  et, incidemment les règles de sélection sont

$$\Delta |\mathbf{I}|^2 \neq 0 \quad \Delta Y \neq 0 \quad \Delta B = 0.$$

## 5.3 Étrangeté et hypercharge

Historiquement, le nombre quantique étrange fut proposé afin d'expliquer des propriétés apparemment contradictoires (étranges) de certaines particules:

1. Elle sont produites copieusement et rapidement dans les interactions fortes ( $\Delta t \simeq 10^{-23}$ s) mais,
2. leur vie moyenne est relativement longue ( $\tau \simeq 10^{-9}$ s), c'est-à-dire d'une magnitude typique des interactions faibles.

Elles ont donc à la fois des interactions fortes et des interactions faibles mais ne se désintègrent pas fortement sinon leurs vies moyennes seraient beaucoup plus courtes.

Une règle de sélection doit donc s'appliquer. La solution consiste à introduire le nombre quantique appelé *étrangeté*,  $S$ .  $S$  est conservé dans les interactions fortes par lesquelles les particules sont produites en paires d'*étrangeté* opposée. La désintégration en particules non-étranges ne peut cependant procéder que par la voie faible ce qui implique que dans les interactions faibles,  $S$  n'est pas conservé en général.

En fait, les observations ont permis de préciser les propriétés de ces particules *étranges*. Considérons, par exemple, les mésons qui forment le multiplet  $J^P = 0^-$  parmi lesquels on peut identifier trois pions ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ), deux doublets de mésons  $K$ , i.e. ( $K^+, K^0$ ) et ( $\bar{K}^0, K^-$ ) et deux mésons  $\eta$  et  $\eta'$ . Ces éléments du même multiplet se distinguent par leur désintégration faible. L'*étrangeté* doit être assignée de la manière suivante.

$$\begin{array}{c} \text{Multiplet } J^P = 0^- \\ \hline \hline (\bar{K}^+, K^0) : S = +1 \\ (\pi^+, \pi^0, \pi^-), \eta, \eta' : S = 0 \\ (\bar{K}^0, K^-) : S = -1 \end{array}$$

De la même façon, le multiplet  $J^P = \frac{1}{2}^+$  compte le doublet ( $p, n$ ), le triplet ( $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ ), le  $\Lambda^0$ , et le doublet ( $\Xi^0, \Xi^-$ ).

$$\begin{array}{c} \text{Multiplet } J^P = \frac{1}{2}^+ \\ \hline \hline (p, n) : S = 0 \\ (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), \Lambda^0 : S = -1 \\ (\Xi^0, \Xi^-) : S = -2 \end{array}$$

L'*étrangeté* est conservée additivement (règle de sélection  $\Delta S = 0$ ) dans les réactions hadroniques (fortes). Par exemple,

$$\begin{array}{l} p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad \Delta S = 0 \\ \rightarrow n + K^+ + K^- \quad \Delta S = 0 \\ \rightarrow p + K^- \quad \Delta S = -1 \\ \rightarrow K^- + \Sigma^- \quad \Delta S = -2. \end{array}$$

Par ailleurs, les désintégrations faibles suivantes sont possibles:

$$\begin{array}{l} \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad \Delta S = +1 \\ K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad \Delta S = +1 \\ \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0 \quad \Delta S = +1 \end{array}$$

avec des vies moyennes typiques de  $10^{-10}$ s. À noter que malgré l'*étrangeté*  $S = -2$  pour  $\Xi^0$ , son mode de désintégration correspond à  $\Delta S = +1$ . En fait, il s'agit d'une autre règle de sélection observée dans les interactions faibles,

$$|\Delta S| = 1.$$

Il est souvent pratique d'utiliser le nombre quantique d'*hypercharge* défini comme:

$$Y = B + S.$$

Puisque  $B$  et  $S$  sont tous deux conservés dans les interactions fortes, l'*hypercharge* est aussi conservée. La conservation de l'*hypercharge* implique l'invariance de l'hamiltonien fort sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iY\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[Y, H_{\text{fort}}] = 0$$

où  $Y$  est le générateur de la transformation.

## 5.4 Autres saveurs

Les nombres quantiques charme, bottom et top ont d'abord et avant tout été introduits dans le contexte du modèle des quarks à l'origine formé seulement des quarks up ( $u$ ), down ( $d$ ) et étrange ( $s$ ) (voir chapitre 6 pour une discussion détaillée du modèle des quarks). Mentionnons seulement pour le moment l'existence de ces nouveaux nombres quantiques et des règles de sélection associées.

### Charme

Malgré ses nombreux succès, le modèle des quarks original ne permettait pas d'expliquer tous les phénomènes observés. Citons pour exemple deux réactions dans lesquelles la charge électrique totale est conservée, mais où l'étrangeté ne l'est pas:

	$K^+$	$\rightarrow$	$\pi^+$	$\nu$	$\bar{\nu}$	$K^+$	$\rightarrow$	$\pi^0$	$\bar{\mu}$	$\nu_\mu$
Charge électrique $Q$	+1	$\neq$	+1	0	0	+1	$\neq$	0	+1	0
Étrangeté $S$	1	$\neq$	0	0	0	1	$\neq$	0	0	0

Ce type de réaction faible, où un quark  $s$  se transforme en quark  $d$ , est permis par la théorie. Le taux de réaction est toutefois très faible  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$  par rapport à la réaction  $K^+ \rightarrow \pi^0 \bar{\mu} \nu_\mu$ , sans raison apparente:

$$\frac{K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}}{K^+ \rightarrow \pi^0 \bar{\mu} \nu_\mu} < 10^{-5}$$

L'addition d'une quatrième saveur de quark, avec la même charge électrique que le quark up, fut suggérée en 1964 par Glashow surtout par soucis de symétrie entre le nombre de quarks et de leptons connus à ce moment. Ce ne fut que quelques années plus tard qu'on réalisa qu'un quatrième quark aurait des répercussion importantes sur les prédictions. Une d'entre-elles est le mécanisme de GIM (Glashow-Illiopoulos-Maiani 1970) qui décrit les modes de désintégration avec changement d'étrangeté. La conséquence de l'introduire un quatrième type de quark est de permettre deux voies de désintégrations au quark étrange dans le  $K^+$ :

$$s \rightarrow u \rightarrow d \tag{5.4}$$

$$s \rightarrow c \rightarrow d \tag{5.5}$$

La suppression du processus  $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$  s'explique alors par le fait que les amplitudes de probabilité associées aux deux routes possibles interfèrent de façon destructive (et s'annulent donc l'une l'autre) alors que ce n'est pas le cas pour le mode  $K^+ \rightarrow \pi^0 \bar{\mu} \nu_\mu$ .

On assigne au quatrième quark (le quark charmé  $c$ ) un nouveau nombre quantique appelé la *charme*  $C$  (où  $C = 1$  pour le quark  $c$  et  $C = -1$  pour l'antiquark  $\bar{c}$  correspondant).

La découverte en 1974 de la particule  $J/\psi$  (un état lié  $c\bar{c}$  baptisée "charmonium")

permet de confirmer l'hypothèse de Glashow et apporta encore plus de crédibilité au modèle des quarks.

Le charme  $C$  est conservé dans les interactions fortes et électromagnétiques seulement:

$$\begin{aligned} [C, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [C, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \end{aligned}$$

et

$$[C, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

## Bottom

En 1977, une nouvelle série de résonances fut découverte à des énergies d'environ 10 GeV lors de collisions  $pp$  à Fermilab. L'interprétation est similaire à celle qu'on a de la particule  $J/\psi$ : il s'agit d'un état lié  $b\bar{b}$ , baptisé  $\Upsilon$ .

On assigne à ce cinquième quark le nombre quantique appelé *bottom* ou *beauty* ("beauté")  $\tilde{B}$ . Ici,  $\tilde{B} = 1$  pour le quark  $b$  et  $\tilde{B} = -1$  pour l'antiquark  $\bar{b}$  correspondant.

Tout comme pour le charme et l'étrangeté, seules les interactions faibles ne conservent pas le nombre quantique bottom  $\tilde{B}$ :

$$\begin{aligned} [\tilde{B}, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\tilde{B}, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \end{aligned}$$

et

$$[\tilde{B}, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

## Top

Très récemment, l'existence du quark *top*  $t$  a été confirmée (1995). Mais de fortes présomptions planaient déjà depuis quelques temps sur l'existence de ce sixième quark surtout à cause d'une possibilité de symétrie entre quarks et leptons. Ces deux classes de particules sont considérées comme élémentaires et ponctuelles. Or, il existe au total six leptons, qui sont regroupés en trois doublets par la théorie des interactions faibles: l'électron et le neutrino électronique, le muon et le neutrino muonique, ainsi que le taon et le neutrino tauonique. Il semblait particulièrement logique et satisfaisant qu'il existe, de la même façon, trois doublets de quarks:  $(u, d)$ ,  $(s, c)$  et  $(b, t)$ . Cette symétrie est plus qu'esthétique puisqu'elle facilite l'annulation des anomalies.

On assigne au quark *top* le nombre quantique appelé *top* ou *truth* ("vérité")  $T$ ,  $T = 1$  pour le quark  $t$  et  $T = -1$  pour l'antiquark  $\bar{t}$ . La masse du quark top est très élevée, i.e. environ 175 GeV. Celui-ci se désintègre donc en quarks plus légers très rapidement en moins de  $10^{-23}$ s, c'est-à-dire en moins de temps qu'il n'en faut pour s'échapper de l'intérieur d'un hadron ou pour former des hadrons (voir résonance page 120)

Seules les interactions faibles ne conservent pas le nombre quantique bottom  $T$ :

$$\begin{aligned} [T, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [T, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \\ [T, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

## Relation de Gell-Mann-Nishijima (révisée)

La relation de Gell-Mann-Nishijima se lit comme suit:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.6)$$

Elle établit la relation entre la troisième composante d'isospin et la charge électrique qui est conservée dans toutes les interactions. Les interactions faibles, comme on l'a vu, interviennent dans le changement de saveur et donc modifient les nombres quantiques  $I_3$ ,  $S$ ,  $C$ ,  $\tilde{B}$  et  $T$  sans toutefois modifier  $Q$ . En fait, on observe que tout changement de saveur obéit à

$$\Delta (2I_3 + S + C + \tilde{B} + T) = 0.$$

On peut inclure ce dernier résultat dans la relation Gell-Mann-Nishijima (généralisée)

$$Q = I_3 + \frac{(B + S + C + \tilde{B} + T)}{2}$$

ce qui équivaut à définir l'*hypercharge* par

$$Y = B + S + C + \tilde{B} + T$$

où

$$\begin{aligned} B &= \text{nombre baryonique} \\ S &= \text{nombre d'étrangeté} \\ C &= \text{nombre de charme} \\ \tilde{B} &= \text{nombre de bottom} \\ T &= \text{nombre de top.} \end{aligned}$$

Le nombre baryonique est introduit ici pour que la formule s'applique aux multiplets de baryons et de mésons.

## 5.5 Conjugaison de la charge

La conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  échange une particule par son antiparticule dans le même état d'impulsion, de position, etc... Dans les faits, cette opération inverse le signe des charges et du moment magnétique de chaque particule.

En mécanique classique, les équations de Maxwell sont invariantes sous le changement de signe de  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ , la densité de charge et de courant, et de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

En mécanique quantique, l'interprétation de  $\mathcal{C}$  est donc plus générale puisque l'échange particule-antiparticule implique que toutes les *charges quantiques* (ou nombres

quantiques additifs) tels que les nombres leptonique, baryonique,... changent de signe.

De façon générale, l'opérateur de conjugaison de charge agit sur un état  $|\psi\rangle$  (particule) en le transformant vers son état conjugué de charge (antiparticule):

$$\mathcal{C}|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle.$$

Toutes les particules ne sont pas des états propres de la conjugaison de charge  $\mathcal{C}$ . En effet, un état propre de  $\mathcal{C}$  doit obéir à l'identité

$$\mathcal{C}|\psi\rangle = \eta_C |\psi\rangle,$$

où  $\eta_C$  est appelé la parité de charge. Ceci implique que  $\mathcal{C}|\psi\rangle$  a les mêmes nombres quantiques (ou charge) que  $|\psi\rangle$ . Les seuls états qui répondent à cette conditions sont les *systèmes vraiment neutres*, c'est-à-dire les états dont toutes charges quantiques et le moment magnétique sont nuls. C'est notamment le cas pour le photon et pour les états liés particule-antiparticule, e.g.

$$\gamma, \pi^0, e^-e^+, \eta, \dots$$

Par ailleurs, le neutron, bien que neutre, possède un moment magnétique non-nul et donc n'a pas de parité de charge définie.

La conjugaison de charge est, tout comme la parité, une opérateur unitaire discret dont les valeurs propres sont

$$\eta_C = \pm 1.$$

## Parité de charge totale

Tout comme dans le cas de l'opérateur de réflexion, la loi de conservation associée à la conjugaison de charge est multiplicative. Par exemple, pour un système de particules libres, on a

$$\mathcal{C}|a, b, c, \dots z\rangle = \eta_C^a \eta_C^b \eta_C^c \dots \eta_C^z |\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots \bar{z}\rangle.$$

La parité de charge totale est alors donnée par

$$\eta_C^{\text{tot}} = \prod_i \eta_C^i.$$

Par contre, en présence d'interactions la parité de charge totale reçoit une contribution supplémentaire associée au moment angulaire orbital. Considérons l'exemple simple d'un système constitué d'une paire  $\pi^+\pi^-$  dans un état de moment angulaire orbital défini,  $l$ . En interchangeant le  $\pi^+$  et le  $\pi^-$ , on inverse leur vecteur de position relative dont la partie spatiale de la fonction d'onde totale dépend. Cette dernière opération est équivalente à une réflexion appliquée sur une harmonique sphérique, et génère un facteur de phase de  $(-)^l$ , i.e.

$$\mathcal{C}|\pi^+\pi^-\rangle = (-)^l |\pi^+\pi^-\rangle.$$

Pour un système boson-antiboson, la parité de charge est

$$\eta_C^{b\bar{b}} = (-)^l.$$

Le cas des paires de fermions de spin- $\frac{1}{2}$  est similaire (e.g.  $e^+e^-$ ,  $q\bar{q}$ , ...). Toutefois, deux facteurs additionnels viennent contribuer:

1. un facteur de  $(-)^{s+1}$  dû à l'échange de la partie spinorielle de la fonction d'onde;
2. un facteur de  $(-)^1$  qui apparaît lorsque des fermions ou antifermions sont interchangés.

La parité de charge totale s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |f\bar{f}\rangle &= (-)^l (-)^{s+1} (-)^1 |f\bar{f}\rangle \\ &= (-)^{l+s} |f\bar{f}\rangle \end{aligned}$$

soit

$$\eta_C^{f\bar{f}} = (-)^{l+s}.$$

## Invariance sous $\mathcal{C}$

L'opérateur de conjugaison de charge n'affecte pas les nombres quantiques que sont la masse, l'impulsion, l'énergie dans les interactions fortes et électromagnétiques, le spin et laisse aussi invariante l'opération de conjugaison complexe,  $K$

$$[\mathcal{C}, \mathbf{p}] = [\mathcal{C}, H_{\text{fortes}}] = [\mathcal{C}, H_{\text{em}}] = [\mathcal{C}, \mathbf{J}] = [\mathcal{C}, K] = 0.$$

Par ailleurs, il inverse le signe de charges électrique, baryonique, leptonique, de l'étrangeté, de la troisième composante d'isospin, et du moment magnétique, i.e.

$$\{\mathcal{C}, Q\} = \{\mathcal{C}, B\} = \{\mathcal{C}, L\} = \{\mathcal{C}, S\} = \{\mathcal{C}, I_3\} = \{\mathcal{C}, \boldsymbol{\mu}\} = 0.$$



### Exemple 5.1

Considérons le proton et l'antiproton représentés respectivement par  $|p\rangle$  et  $|\bar{p}\rangle$ . Le proton et l'antiproton sont des états propres de charge

$$\begin{aligned} Q |p\rangle &= |p\rangle \\ Q |\bar{p}\rangle &= -|\bar{p}\rangle. \end{aligned}$$

La conjugaison de charge transforme proton en antiproton et vice versa

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |p\rangle &= |\bar{p}\rangle \\ \mathcal{C} |\bar{p}\rangle &= |p\rangle. \end{aligned}$$

Il en découle naturellement que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}Q |p\rangle &= \mathcal{C} |p\rangle = |\bar{p}\rangle \\ Q\mathcal{C} |p\rangle &= Q |\bar{p}\rangle = -|\bar{p}\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\mathcal{C}Q + Q\mathcal{C}) |p\rangle = \{\mathcal{C}, Q\} |p\rangle = 0.$$

## Les pions et les photons

Il n'existe que quelques particules qui sont des états propres de la conjugaison de charge.

Le  $\pi^0$ , qui est un état de spin  $s = 0$  et de moment angulaire  $l = 0$  formé de quarks  $u\bar{u}$  et  $d\bar{d}$ , est un état *vraiment neutre*. Il doit avoir une parité de charge  $\eta_C^{\pi^0} = (-)^{l+s} = 1$ . Ce résultat est effectivement vérifié expérimentalement par l'observation du processus

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

La conservation de la parité de charge implique dans ce cas

$$\eta_C^{\pi^0} = (\eta_C^\gamma)^2 = 1,$$

quelque soit la parité de charge du photon.

D'autre part, la parité de charge des photons peut être facilement déduite des propriétés classique du champ électromagnétique. Puisque l'opération consiste à inverser la charge et le moment magnétique, elle inverse donc les champs électrique et magnétique. Le quadri-vecteur  $A_\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x))$  se transforme donc suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\phi(x) &= -\phi(x) \\ \mathcal{C}\mathbf{A}(x) &= -\mathbf{A}(x) \end{aligned}$$

ce qui correspond à un parité de charge négative,  $\eta_C^\gamma = -1$ . Cette conclusion est confirmée par l'absence du mode de désintégration

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma.$$

Ce mode implique normalement un couplage électromagnétique de plus et on serait en droit de s'attendre à une suppression

$$R = \frac{\sigma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\sigma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} = \mathcal{O}(\alpha_{em})$$

mais  $R < 3 \times 10^{-8} \ll \alpha_{em}$ . Si ce mode était permis, alors la conservation de la parité de charge mènerait à une parité positive pour le photon

$$\eta_C^{\pi^0} = 1 \neq (\eta_C^\gamma)^3 = \eta_C^\gamma = -1.$$

## Systèmes particule-antiparticule

Dans le cas de systèmes particule-antiparticule, on peut invoquer le principe de Pauli généralisé selon lequel il y a symétrie ou antisymétrie sous l'échange total de particules. Par échange total, on entend échange de leur charge électrique, de leur position et de leur spin.

Le positronium procure une vérification complémentaire de la conservation de la parité de charge dans les interactions électromagnétiques. Il s'agit d'un état lié  $e^+e^-$  qui ressemble beaucoup à l'atome d'hydrogène pour peu qu'on tienne compte de la différence de masse réduite et des effets relativistes. Les états liés peuvent être décrits par la notation spectroscopique

$$^{2S+1}L_J,$$

où  $S$ ,  $L$  et  $J$  sont le spin total, le moment angulaire orbital et le moment angulaire total. La parité et la parité de charge pour ces états liés sont données par

$$\eta_P = \eta_P^{e^+} \eta_P^{e^-} (-)^L$$



$$\eta_C = (-)^{L+S}.$$

Le *parapositronium* et l'*orthopositronium* sont les états  $^1S_0$  et  $^3S_1$  (niveau  $n = 1$ ,  $L = 0$ ,  $S = 0, 1$ ) respectivement et possèdent les parités de charge  $+1$  et  $-1$ . Dans la désintégration de ces états en deux photons ( $\eta_C^{2\gamma} = 1$ ) et trois photons ( $\eta_C^{3\gamma} = -1$ ), on observe expérimentalement les modes permis et interdits suivant:

$$\begin{aligned} ^1S_0 &\rightarrow \gamma + \gamma \\ &\not\rightarrow \gamma + \gamma + \gamma \\ ^3S_1 &\rightarrow \gamma + \gamma + \gamma \\ &\not\rightarrow \gamma + \gamma \end{aligned}$$

en accord avec la conservation de la parité de charge.

Le même type de raisonnement s'applique aux systèmes quark-antiquark dont la parité de charge est

$$\eta_C = (-)^{L+S}.$$

Par ailleurs, dans les systèmes de particule-antiparticule impliquant des pions (e.g.  $\pi^+\pi^-$  ou  $\pi^0\pi^0$ ) pour lesquels  $B = Y = Q = 0$ , le principe de Pauli généralisé requiert la symétrie sous l'échange d'où

$$\eta_C (-)^L = 1$$

ou

$$\eta_C = (-)^L.$$

Pour un système  $\pi^0\pi^0$ , le principe de Pauli ordinaire s'applique puisque les  $\pi^0$  sont des particules identiques et donc

$$(-)^L = +1$$

et  $L$  doit être pair. Il en découle que

$$\eta_C^{\pi^0\pi^0} = +1$$

alors que pour  $\pi^+\pi^-$

$$\eta_C^{\pi^+\pi^-} = (-)^L.$$

## Violation de $\mathcal{CP}$ ou $\mathcal{T}$ et Théorème $\mathcal{CPT}$

L'invariance sous  $\mathcal{CP}$  (action combinée de la conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  et d'une réflexion  $\mathcal{P}$ ) n'est en général pas respectée dans les interactions faibles

$$[\mathcal{CP}, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

C'est notamment le cas dans la désintégration de  $K^0$  et  $\bar{K}^0$ . Cependant, un effort expérimental soutenu depuis quelques années tente d'analyser l'invariance sous  $\mathcal{T}$  en raison du *théorème  $\mathcal{CPT}$* .

Le *théorème  $\mathcal{CPT}$*  découle de l'interprétation des équations de mouvement relativistes en terme de particules et antiparticules. Il est valide pour toute théorie relativiste pour laquelle les particules ne peuvent atteindre une vitesse supérieure à celle de la lumière.

Posons la transformation  $\mathcal{R} = \mathcal{CPT}$  (opération combinée de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{T}$ ); son effet

est:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^\mu \rightarrow -x^\mu \\ Q, B, L_e, \dots \rightarrow -Q, -B, -L_e, \dots \end{cases}$$

Par exemple,  $\mathcal{R}$  change une particule au repos en son antiparticule au repos. Toutes deux sont décrites par la même équation de mouvement si l'invariance sous  $\mathcal{CPT}$  n'est pas brisée. Elles sont donc caractérisées par la même masse et la même vie moyenne. Autres conséquences: une brisure de l'invariance sous  $\mathcal{P}$  implique une brisure de l'invariance sous  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{T}$ , ou encore, l'invariance sous  $\mathcal{CP}$  implique l'invariance sous  $\mathcal{T}$ , etc...

La démonstration expérimentale du *théorème CPT* reste toutefois une question ouverte malgré les arguments théoriques sur lesquels il est fondé. Voici une liste de quelques tests du *théorème CPT*.

Tests du théorème $\mathcal{CPT}$		
	$a\bar{a}$	Limite
Demi-vie ( $\frac{\Delta\tau}{\tau}$ )	$\mu\bar{\mu}$	$< 10^{-4}$
	$\pi^- \pi^+$	$< 10^{-3}$
	$K^- K^+$	$< 10^{-3}$
Moment magnétique ( $\frac{\Delta \mu }{ \mu }$ )	$e\bar{e}$	$< 10^{-10}$
	$\mu\bar{\mu}$	$< 10^{-8}$
Masse ( $\frac{\Delta m}{m}$ )	$\pi^- \pi^+$	$< 10^{-3}$
	$K^- K^+$	$< 10^{-4}$
	$K^0 \bar{K}^0$	$< 10^{-14}$
	$p\bar{p}$	$< 10^{-4}$

## 5.6 Parité- $\mathcal{G}$

La conservation de la parité de charge ne s'applique qu'à un nombre très limité de systèmes (les systèmes vraiment neutres). Par exemple, considérons le pion qui existe sous trois états de charge. Seul le  $\pi^0$  est un état propre de la conjugaison de charge

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |\pi^0\rangle &= |\pi^0\rangle \\ \mathcal{C} |\pi^\pm\rangle &\neq \pm |\pi^\mp\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que dans les interactions fortes la charge électrique n'a aucun effet. Il est donc impossible, du point de vue des interactions fortes seulement, de distinguer le  $\pi^0$  du  $\pi^-$  ou  $\pi^+$ . On peut donc penser à généraliser le concept de conjugaison de charge de manière à l'étendre à tous les états de charge d'un même multiplet, i.e.

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} = \eta_G \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

où  $\eta_G = \pm 1$ . Le nouvel opérateur de parité- $\mathcal{G}$  est défini par

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} e^{i\pi I_2}$$

où  $I_2 (= \sigma_2)$  est l'opérateur associé à la deuxième composante du vecteur d'isospin.  $\mathcal{G}$  est la combinaison de la conjugaison de charge et d'une rotation de  $\pi$  autour du deuxième axe dans l'espace d'isospin.

Considérons le multiplet de pions. Pour être en mesure d'apprécier la rotation dans l'iso-espace,  $e^{i\pi I_2}$ , il est plus pratique d'écrire les états de charge du pion en terme des composantes d'isospin  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , i.e.  $|\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle$  et  $|\pi_3\rangle$  comme

$$\begin{aligned} |\pi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_1\rangle \mp i|\pi_2\rangle) \\ |\pi^0\rangle &= |\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

Alors l'effet d'une rotation sur les états est:

$$\begin{aligned} e^{i\pi I_2} |\pi_1\rangle &= -|\pi_1\rangle \\ e^{i\pi I_2} |\pi_2\rangle &= |\pi_2\rangle \\ e^{i\pi I_2} |\pi_3\rangle &= -|\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, la conjugaison de charge donne

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |\pi_1\rangle &= |\pi_1\rangle \\ \mathcal{C} |\pi_2\rangle &= -|\pi_2\rangle \\ \mathcal{C} |\pi_3\rangle &= |\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

En combinant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G} |\pi^0\rangle &= -|\pi^0\rangle \\ \mathcal{G} |\pi^\pm\rangle &= -|\pi^\pm\rangle \end{aligned}$$

soit une parité- $\mathcal{G}$  de  $-1$ .

Puisque la parité de charge et l'isospin sont tous deux conservés dans les interactions fortes, la parité- $\mathcal{G}$  l'est aussi.

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\mathcal{G}, H_{\text{e.m.}}] &\neq 0 \\ [\mathcal{G}, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

Les interactions électromagnétiques et faibles ne sont pas invariantes sous  $\mathcal{G}$ .

Tous les multiplets ne sont pas nécessairement des états propres de la parité- $\mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  implique une conjugaison de charge dont les états propres sont comme on le sait vraiment neutres. Lorsqu'appliquée sur tout le multiplet, la conjugaison de charge devrait voir le multiplet globalement comme un objet vraiment neutre. Donc seuls les multiplets dont les charges moyennes sont nulles peuvent être des états propres de  $\mathcal{G}$ .

$$\bar{Q} = 0, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{Y} = 0$$

C'est le cas du multiplet du pion dont la parité- $\mathcal{G}$  est  $-1$ . Le multiplet des nucléons n'a pas de parité- $\mathcal{G}$  définie.

En général, la parité- $\mathcal{G}$  d'un état d'isospin  $I$  est donné par

$$\eta_G = \eta_C (-)^I.$$

Par conséquent, les systèmes fermion-antifermion (e.g.  $p\bar{p}, q\bar{q}, \dots$ ) ont un parité- $\mathcal{G}$

$$\eta_G = \eta_C (-)^{L+S+I},$$

alors que les systèmes boson-antiboson (e.g.  $\pi^+\pi^-, \rho^+\rho^-, \dots$ ) ont un parité- $\mathcal{G}$

$$\eta_G = \eta_C (-)^{L+I}.$$

## 5.7 Résonances

Dans des processus impliquant des interactions fortes, on observe des états très instables ( $\tau \leq 10^{-23}$ s) appelés *résonances*. On les détecte par l'analyse des distributions de masses invariantes où des pics du type Breit-Wigner sont observés.

Considérons par exemple la réaction



Pendant cette réaction ( $\tau \leq 10^{-23}$ s), des états intermédiaires peuvent se former (voir figures 5.1). Si c'est le cas, la matrice de transition du processus prend la forme

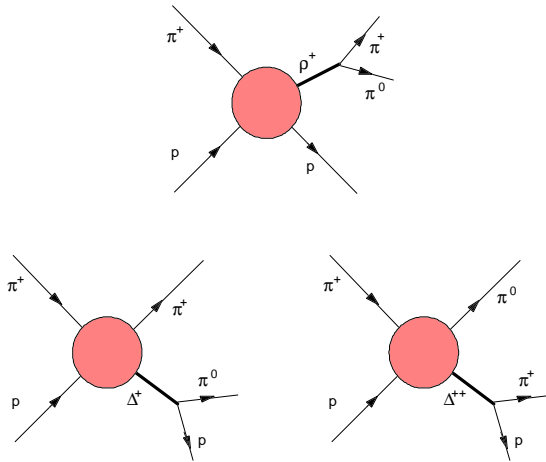


Figure 5.1 Exemple de résonances hadroniques.

$$T \sim T_0 \frac{g_1 g_2}{s_{ij} - m^2 + i\Gamma m}$$

où  $T_0$  est la partie de la matrice de transition qui ne dépend pas de la résonance.  $g_1$  et  $g_2$  sont les couplages de la résonance avec le reste du processus.  $m$  et  $\Gamma$  sont respectivement la masse et la largeur de désintégration de la résonance. Finalement, la masse invariante  $s_{ij}$  des particules  $i$  et  $j$  est donnée par

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = M_{ij}^2$$

où  $p_i$  et  $p_j$  sont les impulsions des particules finales. On observe alors un pic dans le distribution en fonction de  $s_{ij}$  autour de la masse de la résonance  $m$ .

Dans une réaction impliquant trois particules finales comme dans (5.7), l'espace de

phase est décrit par l'équation (3.33)

$$\bar{N}_{tot} = \frac{1}{16(2\pi)^3 s} \int ds_{34} ds_{24}$$

ou

$$\frac{d\bar{N}_{tot}}{ds_{34} ds_{24}} = \frac{1}{16(2\pi)^3 s}.$$

À moins qu'il y ait une dépendance explicite de la matrice de transition en fonction de  $s_{34}$  et  $s_{24}$  comme dans le cas de pics à la Breit-Wigner, la distribution des événements suivant les masses invariantes  $s_{34}$  et  $s_{24}$  doit être uniforme.

$s_{24}$  et  $s_{34}$  sont bornés cinématiquement. Les limites sont les mêmes que celles décrites dans la désintégration à trois corps décrite dans une section précédente à l'équation (3.35). Le diagramme de la figure 5.2 illustre la région cinématique permise (partie ombrée). Ici  $m_1 = \sqrt{s}$ .

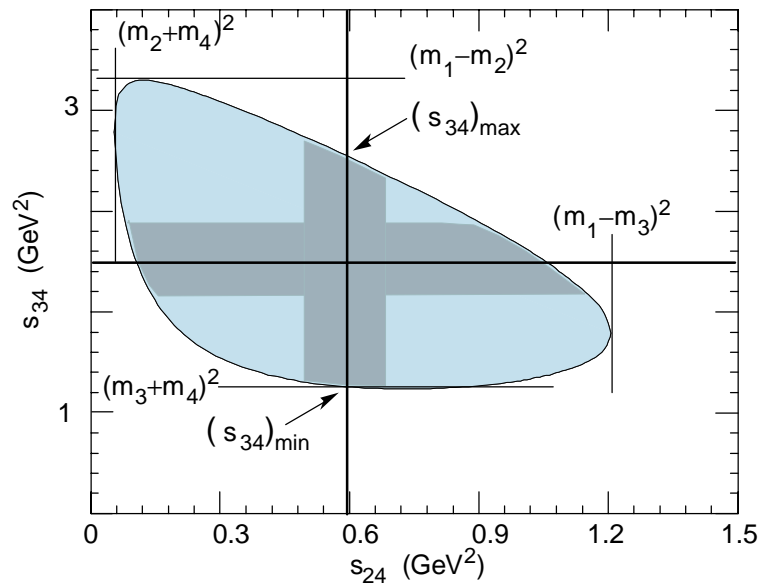


Figure 5.2 Diagramme de Dalitz: Une distribution uniforme des événements en fonction des masses invariantes signifie qu'aucune résonance n'est observée. Par ailleurs, si on note que la distribution de événements est regroupée autour de certaines valeurs des masses invariantes  $s_{34}$  ou  $s_{24}$  (partie foncée), il est possible d'en déduire la masse et la largeur de désintégration des résonances. Par exemple, la position et la largeur du pic dans la distribution des événements en fonction de  $s_{34}$  sont respectivement  $m_{\Delta^+}^2$  et  $\Gamma_{\Delta^+}$  alors que ceux associés à  $s_{24}$  sont  $m_{\rho^+}^2$  et  $\Gamma_{\rho^+}^2$ . ( $m_{\Delta^+} = 1232$  MeV,  $\Gamma_{\Delta^+} = 115.0$  MeV,  $m_{\rho^+} = 768.5$  MeV et  $\Gamma_{\rho^+} = 150.7$  MeV).

Les diagrammes de Dalitz illustrent la distribution des événements en fonction des

masses invariantes. Alors, une distribution uniforme des événements en fonction des masses invariantes signifie qu'aucune résonance n'est observée. Par ailleurs, si on note que la distribution des événements est regroupée autour des masses invariantes (e.g.  $\Delta^+$  (1232 MeV) et du  $\rho^+$  (768.5 MeV)), il est possible d'en déduire la masse et la largeur de désintégration des résonances. Dans le cas des résonances  $\Delta^+$  et  $\rho^+$ , les pics devraient se retrouver autour des masses

$$m_{\Delta^+} = 1232 \text{ MeV}$$

$$m_{\rho^+} = 768.5 \text{ MeV}$$

et avoir une largeur à mi-hauteur de

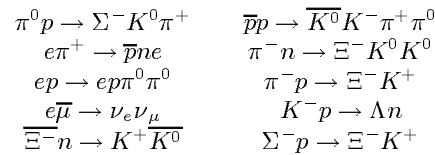
$$\Gamma_{\Delta^+} = 115.0 \text{ MeV}$$

$$\Gamma_{\rho^+} = 150.7 \text{ MeV}$$

## 5.8 Problèmes

### 1. Lois de conservation

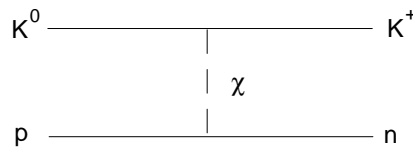
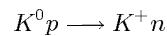
Indiquer lesquelles des réactions suivantes sont interdites et les lois de conservation qui sont violées:



Rappel: Dans les interactions faibles,  $I_3$  et  $S$  ne sont conservés, mais  $\|\Delta S\| = 0, 1$ . (La barre indique l'antiparticule, e.g.  $\bar{p}$  = antiproton).

### 2. Identité d'une particule

Soit la réaction "forte":



Si on suppose qu'elle se produit par l'échange d'une seule particule,  $\chi$ , dans le canal  $t$  (tel qu'indiqué sur la figure) lesquelles des particules suivantes ne peuvent être échangées et pourquoi?

$$\chi = N, \pi, K, \Sigma, \Xi, \rho(770), \omega(782), \eta, a_0(980), \mu$$

Procéder comme suit:

- Déterminer  $Q$ ,  $B$ ,  $S$ ,  $L$ (nombre leptonique),  $I$ , et  $I_3$  de  $\chi$ .
- Pour un spin  $J$ , déterminer la parité  $P$ .
- Finalement, identifier la ou les particules de la liste qui correspondent à ces nombres quantiques.

N.B.:  $N$  représente le proton et le neutron,  $\pi = \pi^{\pm,0}$ , etc...

### 3. Isospin total

Dans quels états d'isospin total,  $I$ , peuvent se combiner les systèmes suivants: (a)  $p\bar{p}\pi^0$  et (b)  $\pi^0\pi^0\pi^0$ .

Note: Procéder en deux étapes.

- Combiner les états d'isospin de deux particules en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan.
- Combiner le résultat en ci-haut avec l'état d'isospin de la troisième particule selon la même méthode.

### 4. Invariance sous $\mathcal{C}$

Utiliser l'invariance sous  $\mathcal{C}$  (conjugaison de charge) dans les interactions électromagnétique pour trouver le nombre minimum de photons produit dans la désintégration de l'état fondamental de

- (a) l'ortho-positronium ( $S = 1$ ) et
- (b) le para-positronium ( $S = 0$ ).

5. **Conjugaison de charge**

On observe le mode de désintégration du méson pseudoscalaire en deux photons, i.e.  $\eta \longrightarrow \gamma\gamma$ , dans une proportion de 39%.

- (a) Que peut-on en déduire sur ses propriétés sous  $\mathcal{C}$  (conjugaison de charge)
- (b) La désintégration **électromagnétique** du  $\eta$  en trois photons ( $\eta \longrightarrow \gamma\gamma\gamma$ ) est-elle possible? Expliquer votre réponse.

6. **Neutrinos ou antineutrinos**

Remplacer le symbole  $\nu$  par la particule appropriée  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$  dans les réactions suivantes:

- (a)  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \nu$
- (b)  $\Sigma^- \rightarrow n + \mu^- + \nu$
- (c)  $\nu + p \rightarrow n + e^+$
- (d)  $\nu + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+$
- (e)  $\tau^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \nu$

7. **Interaction forte**

Déterminer si les réactions suivantes se produisent par interactions fortes ou non. Expliquer votre réponse.

- (a)  $K^- + p \rightarrow K^0 + n$
- (b)  $K^0 + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
- (c)  $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
- (d)  $K^0 + p \rightarrow K^+ + n$
- (e)  $K^0 + p \rightarrow K^+ + \pi^0$

8. **Lois de conservation**

Déterminer si les réactions suivantes sont possibles?

- (a)  $\Lambda^0 \rightarrow K^- + \pi^+$
- (b)  $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$
- (c)  $\Lambda^0 \rightarrow p + e^-$
- (d)  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
- (e)  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0$







# 6 LE MODÈLE DES QUARKS

## 6.1 Introduction

### Historique

Le modèle des quarks fut à l'origine motivé par deux observations empiriques:

1. Le nombre de leptons connus est limité à six alors qu'il existe une multitude de hadrons;
2. La classification de ces hadrons en fonction de leurs nombres quantiques (nombre baryonique, spin, isospin, étrangeté) révèle l'existence d'une structure (d'une symétrie) sous-jacente..

Nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent: on observe expérimentalement que les hadrons apparaissent en singulets, en octets ou en décuplets. En fait, chaque multiplet est caractérisé par un nombre baryonique, un spin et une parité définis. Par exemple, les multiplets les plus légers de baryons ( $J^P = \frac{1}{2}^+$ ) et de mésons ( $J^P = 0^-$ ) sont respectivement un octet et un nonet. Il est particulièrement instructif de visualiser ces particules en fonction de leur nombre quantique d'hypercharge et d'isospin (voir figures 6.1 et 6.2). On note tout de suite que les représentations des multiplets de baryons et de mésons sont dans ce cas-ci très similaires.

De plus, à l'intérieur d'un multiplet, les particules de même valeur d'étrangeté  $S$  ont des masses approximativement égales, alors que l'écart de masse correspondant à un intervalle  $\Delta S = \Delta Y = 1$  est une constante d'environ 150 MeV.

En 1964, Murray Gell-Mann et George Zweig suggérèrent que les hadrons n'étaient pas véritablement des particules élémentaires, mais étaient constitués de composantes plus fondamentales, les *quarks*. Pour rendre compte de la variété des hadrons connus à l'époque, on avait besoin de trois types (trois *saveurs* ou *parfums*) de quarks, que l'on nomma *up*, *down* et *étrange* (respectivement  $u$ ,  $d$  et  $s$ ). La représentation en multiplets (singulets, octets et décuplets) des hadrons peut être dérivée de la représentation *fondamentale* ( $u, d, s$ ) (voir figures 6.3).

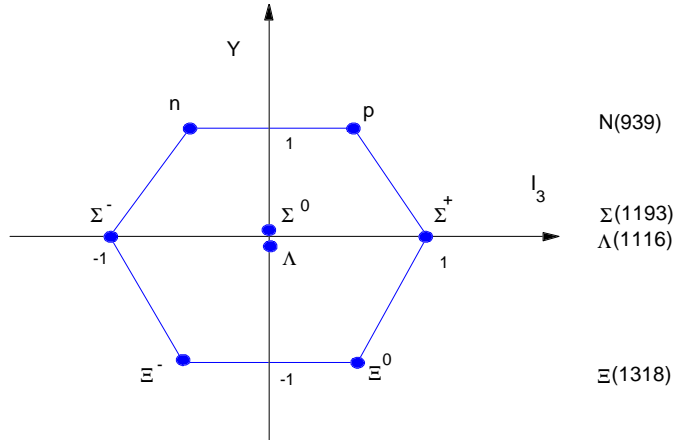


Figure 6.1 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$ : la position des baryons est assignée en fonction de l'hypercharge et l'isospin. La colonne de droite montre la masse moyenne (en MeV) des différents états de charge d'un sous-multiplet d'isospin.

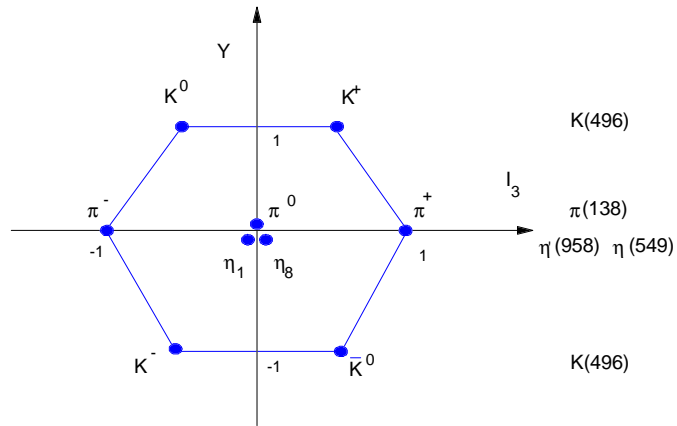


Figure 6.2 Multiplet de mésons  $J^P = 0^-$ : la position des mésons est assignée en fonction de l'hypercharge et l'isospin. La colonne de droite montre la masse moyenne (en MeV) des différents états de charge d'un sous-multiplet d'isospin. On note ici que les états propres de masse des particules  $\eta$  et  $\eta'$  diffèrent des états d'hypercharge-isospin  $\eta_1$  (singulet) et  $\eta_8$  (octet).

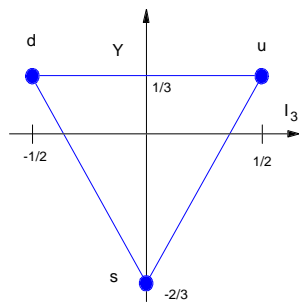


Figure 6.3 Représentation fondamentale des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ .

Selon ce modèle, les baryons (antibaryons) sont formés de trois quarks (antiquarks), alors que les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquark.

Plus tard, la construction d'accélérateurs plus puissants a permis de découvrir l'existence de deux autres saveurs de quarks (*charmé*  $c$  et *bottom*  $b$ ). Tout récemment, en 1995, l'existence d'une sixième saveur, le *top*  $t$ , fut confirmée.

On n'a jamais observé directement de quarks isolés, mais leur existence physique est supportée de façon indirecte par le bombardement de protons et de neutrons par un faisceau d'électrons fortement accélérés. Dès la fin des années '60, des expériences menées à l'accélérateur linéaire de Stanford révélèrent que la distribution angulaire et énergétique des électrons diffusés était en accord avec le modèle; les électrons semblaient entrer en collision avec des particules ponctuelles chargées à l'intérieur des protons et des neutrons.

Puisque certains aspects du modèle des quarks sont mieux compris avec le langage de la théorie des groupes, la première partie de ce chapitre introduit certains concepts utiles sur les groupes. Ces concepts peuvent sembler abstraits ou même peu utiles à prime abord. C'est pourquoi nous tentons de visualiser chacun de ces concepts dans le contexte d'un groupe bien connu en mécanique quantique, le groupe qui décrit le spin et l'isospin,  $SU(2)$ .

Nous établissons aussi le lien entre la représentation du groupe  $SU(N)$  et le modèle des quarks, pour ensuite construire les fonctions d'onde associées aux baryons et aux mésons.

Par la suite, nous considérons les extensions du modèle original, i.e. l'ajout de trois nouvelles saveurs et l'introduction du concept de la *couleur*. Certaines propriétés statiques (masse, moment magnétique) des quarks seront étudiées, ainsi que leur dynamique (interactions fortes et faibles).

## 6.2 Théorie des groupes

Commençons par décrire formellement ce qu'est un groupe.

### Propriétés générales d'un groupe

Les groupes de transformation considérés ici sont des *groupes continus*, i.e. que les paramètres décrivant les transformations sont des variables continues.

Un groupe  $G$  est formé d'un ensemble d'éléments  $(a, b, c, \dots)$  et d'une règle de composition (notée ici par le symbole  $\circ$ ). Il possède les propriétés suivantes:

1. Relation de fermeture:

Si  $a$  et  $b$  sont des éléments du groupe  $G$ , alors  $a \circ b$  est également un élément de  $G$

$$\forall a, b \in G : a \circ b \in G. \quad (6.1)$$

2. Existence d'un élément identité:

Il existe un élément-identité  $I$  tel que pour tout élément  $a$  de  $G$ , la relation  $a \circ I =$

$I \circ a = a$  est satisfaite,

$$\forall a \in G, \exists I \in G : a \circ I = I \circ a = a. \quad (6.2)$$

3. Existence d'un élément inverse:

Chaque élément  $a$  du groupe possède un inverse unique  $a^{-1}$  tel que  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I$ ,

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I. \quad (6.3)$$

4. Associativité:

Si  $a, b$  et  $c$  sont des éléments de  $G$ , alors la relation  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  est satisfaite,

$$\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c). \quad (6.4)$$

## Groupe de Lie (compact)

Les groupes de Lie compacts sont particulièrement utiles en physique des particules (e.g. le groupe  $SU(2)$  de l'isospin). Ils sont caractérisés par des transformations unitaires continues, c'est-à-dire que chaque transformation est définie par un ensemble de paramètres continus et une loi de multiplication qui dépend de manière monotone des paramètres.

Ces transformations sont équivalentes à une représentation d'opérateur unitaire

$$U = e^{i\alpha^a T_a}$$

où  $\alpha^a \in \mathfrak{R}$  avec  $a = 1, 2, 3, \dots, N$ .  $T_a$  sont des opérateurs hermitiques linéairement indépendants qui sont souvent identifiés aux générateurs du groupe. Dans  $SU(2)$ ,  $U$  peut être assimilé à la notion de rotation dans l'espace des spins ou isospins.

Considérons le produit suivant d'éléments du groupe (pouvant par exemple représenter des rotations infinitésimales successives dans l'espace des spins ou isospins pour  $SU(2)$ ),

$$\begin{aligned} P &= e^{i\lambda T_b} e^{i\lambda T_a} e^{-i\lambda T_b} e^{-i\lambda T_a} \\ &= 1 + \lambda^2 [T_a, T_b] + \dots \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est infinitésimal. La propriété de fermeture du groupe nous permet d'écrire

$$P = e^{i\alpha^c T_c} = 1 + i\alpha^c T_c + \dots$$

Il en découle qu'à l'ordre  $\lambda^2$ ,

$$\lambda^2 [T_a, T_b] = i\alpha^c T_c$$

et qu'en écrivant  $\alpha^c = \lambda^2 f_{abc}$ , on obtient l'identité

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

qui définit l'algèbre du groupe. Les quantités  $f_{abc}$ , appelées constantes de structure, sont des paramètres constants qui caractérisent chaque groupe.

Les propriétés de cyclicité des générateurs se traduisent par une identité très importante en théorie des groupes, l'identité de Jacobi

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0$$

ou encore

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} = 0.$$

Pour  $SU(2)$ , la relation de commutation s'écrit

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

où on reconnaît le tenseur de Levi-Civita.

## Représentations

Pour tout élément  $x$  d'un groupe, il existe un opérateur unitaire  $D(x)$ . Par ailleurs, si on a deux éléments du groupe  $x$  et  $y$  et que

$$D(x) \cdot D(y) = D(x \cdot y)$$

alors  $D(x)$  est appelé une *représentation*. De plus, si  $D$  est diagonalisable en bloc on dit que la représentation est réductible. Il est donc possible de trouver une matrice  $S$  telle que

$$D' = SDS^{-1}$$

est diagonale en bloc, par exemple

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Dans le cas contraire où  $D$  n'est pas diagonalisable en bloc, la représentation est dite irréductible. Deux représentations sont particulièrement intéressantes:

La *représentation fondamentale*: c'est la plus petite représentation irréductible (i.e. qui ne contient pas de sous-espace invariant) et non-triviale du groupe. Pour  $SU(2)$ , il s'agit d'un doublet

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

La *représentation adjointe*: les constantes de structure du groupe génèrent elles-mêmes une représentation, la représentation adjointe, de l'algèbre. Posons un ensemble de matrices définies par

$$(T_a)_{bc} \equiv if_{abc}$$

alors  $(T_a)_{bc}$  obéit forcément à la relation

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

à cause de l'identité de Jacobi. De plus, il est facile de prouver que

$$\begin{aligned} \text{Tr} [T_a T_b] &= \lambda \delta_{ab} \\ f_{abc} &= -\frac{i}{\lambda} \text{Tr} [[T_a, T_b] T_c]. \end{aligned}$$

Pour  $SU(2)$ , la représentation adjointe est définie par le tenseur de Levi-Civita.



## Racine, rang et poids

Puisque les générateurs d'un groupe définissent les transformations, il ne faut pas s'étonner qu'un certain nombre de propriétés associées à ce groupe découlent directement de l'analyse des générateurs.

### Rang:

On peut tout d'abord diviser les générateurs d'un groupe en deux ensembles:

1. Les opérateurs hermitiques diagonaux,  $H_i$  (e.g.  $J_3$  dans  $SU(2)$ )
2. Les opérateurs de création et d'annihilation,  $E_\alpha$  (e.g.  $J_\pm$  dans  $SU(2)$ ).

Considérons  $T_a$ , les générateurs dont les combinaisons linéaires  $H_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, m$  sont diagonales, hermitiques et possèdent les propriétés suivantes:

1.  $H_i = C_{ia} T_a$ ,
2.  $[H_i, H_j] = 0$ ,
3.  $\text{Tr}[H_i H_j] = k_D \delta_{ij}$ ,
4.  $m$  est le plus grand possible.

Alors, le rang  $m$  est le nombre maximum d'opérateurs hermitiques diagonalisables. Physiquement, ceci correspond au nombre maximum de nombres quantiques qui déterminent un état. Dans  $SU(2)$  par exemple, le rang est de 1.

### Poids:

Posons des états caractérisés par deux quantités  $\mu$  et  $D$ , le vecteur de poids dont les composantes sont  $\mu_i$  et la représentation, respectivement. Sous les opérateurs hermitiques  $H_i$ , les états propres  $|\mu, D\rangle$  deviennent

$$H_i |\mu, D\rangle = \mu_i |\mu, D\rangle$$

où  $\mu_i$ , les poids, sont les valeurs propres de  $H_i$ .

Puisque dans  $SU(2)$ , le rang est  $m = 1$ , il existe un seul opérateur hermitique diagonalisable qui correspond à  $J_3$ . Dépendant de la représentation (singulet, doublet, triplet, ...), le vecteur de poids, qui ici ne possède qu'une seule composante, peut prendre les valeurs

$$\mu = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J.$$

La quantité  $J$ , comme on le voit, est le poids le plus élevé de la représentation.

### Racines:

Dans la représentation adjointe, chaque état correspond à un générateur du groupe. Ils sont représentés par la matrice  $(T_a)_{bc} = -if_{abc}$ . En abrégant la notation on peut écrire

$$T_a \rightarrow |T_a\rangle$$

avec un produit scalaire défini par

$$\langle T_a | T_b \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} [T_a^\dagger T_b].$$

L'action d'un générateur sur ces états est

$$T_a |T_b\rangle = |[T_a, T_b]\rangle$$

mais alors on connaît déjà les vecteurs de poids nul puisqu'on sait que les opérateurs hermitiques  $H_i$  commutent entre eux

$$\begin{aligned} H_i |H_j\rangle &= |[H_i, H_j]\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le reste des générateurs est décrit par les états  $|E_\alpha\rangle$  tels que

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle$$

ce qui correspond au commutateur

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha.$$

Ces objets ne sont pas nécessairement hermitiques, alors on écrira

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger$$

puisque  $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$ .

En normalisant

$$\begin{aligned} \langle E_\alpha | E_\beta \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr} [E_\alpha^\dagger E_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \\ \langle H_i | H_j \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr} [H_i H_j] = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Dans  $SU(2)$ ,  $E_{\pm\alpha} = J_\pm$  est l'opérateur de création/annihilation et  $H_i = J_3$  est l'opérateur hermitique diagonal.

Les vecteurs de poids,  $\mu = \alpha$ , de la représentation adjointe sont appelés *racines*. L'opérateur de création/annihilation élève ou abaisse la valeur propre du nouvel état

$$E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = N_{\pm\alpha, \mu} |\mu \pm \alpha, D\rangle$$

En utilisant ces états, on peut prouver que le produit scalaire des vecteurs  $\mu$  et  $\alpha$

$$\alpha \cdot \mu = -\frac{p-q}{2} \alpha^2$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers. Il en découle que le produit scalaire de deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  obéit aux relations suivantes

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= -\frac{m}{2} \alpha^2 \\ \alpha \cdot \beta &= -\frac{m'}{2} \beta^2 \end{aligned}$$

où  $m$  et  $m'$  sont des entiers. Mais alors l'angle entre les deux vecteurs  $\alpha$  et  $\beta$  est

$$\cos^2 \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{mm'}{4}.$$

Le couple d'entiers  $m$  et  $m'$  définit donc les seuls angles possibles, soient:

$(m, m')$	$mm'$	$\theta$
$(0, m'), (m, 0)$	0	$\frac{\pi}{2}$
$(1, 1)$	1	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
$(1, 2), (2, 1)$	2	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
$(1, 3), (3, 1)$	3	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$	4	$0, \pi$

## Rotation en 2D — groupe $SO(2)$

Les rotations en 2D sont essentiellement décrites par des matrices  $2 \times 2$ , e.g.

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

ou en bref

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{V}.$$

Les matrices de rotation  $\mathbf{R}(\theta)$  ont la propriété

$$\mathbf{R}^T(\theta) \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}^T(\theta) = I$$

où  $\mathbf{R}^T(\theta)$  est la matrice transposée de  $\mathbf{R}(\theta)$ . Il en découle que  $\mathbf{R}^T$  est aussi l'inverse de  $\mathbf{R}$  c'est-à-dire  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . De telles matrices sont appelées *orthogonale* puisque qu'elles laissent orthogonal un système de coordonnées orthogonales et ne change pas la longueur des vecteurs. Les matrices orthogonales  $2 \times 2$  forment le groupe appelé  $O(2)$ . Mais les rotations en 2D ont aussi la propriété d'être *unimodulaire* ou *spéciale* c'est-à-dire, que  $\det \mathbf{R} = 1$  ce qui leur vaut de former un groupe distinctif appelé  $SO(2)$ .

En utilisant les combinaisons linéaires appropriées, il est possible de réécrire la relation (6.5) sous la forme

$$\begin{pmatrix} V'_+ \\ V'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix}$$

où  $V_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$  est maintenant complexe. La matrice de transformation étant diagonale, la relation précédente se réduit à deux transformations distinctes:

$$\begin{aligned} V'_+ &= e^{i\theta} V_+ \\ V'_- &= e^{-i\theta} V_- \end{aligned}$$

dont la forme générale se lit

$$W' = e^{ia\theta} W$$

où  $a$  est réel. De telles transformations correspondent à des changements de phase et forment le groupe  $U(1)$  (voir page 137). On voit donc qu'il existe une correspondance  $1 \rightarrow 1$  entre les éléments de  $SO(2)$  (les rotations en 2D) et ceux de  $U(1)$  (les changements de phase). On dit alors que  $SO(2)$  est isomorphe à  $U(1)$ .

## Rotation en 3D — groupe $SO(3)$

Les rotations en 3D transforment un vecteur à trois composantes en un autre vecteur à trois composantes. Il est donc approprié de représenter cette transformation par une matrice  $3 \times 3$  :

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \times & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

ou de façon similaire

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R}\mathbf{V}.$$

La matrice  $\mathbf{R}$  dépend en général de trois paramètres libres qu'on choisit souvent par simplicité comme les angles d'Euler  $\theta_i$  avec  $i = 1, 2, 3$  soit

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\theta_i) = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 s_1 & s_1 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_2 \\ s_1 s_2 & -c_1 c_3 s_2 - c_2 s_3 & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

où

$$c_i = \cos \theta_i \quad s_i = \sin \theta_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Sous cette forme générale, il est facile de vérifier que pour tous  $\theta_i$ , les matrices de rotation 3D sont orthogonales, i.e.

$$\mathbf{R}^T(\theta_i) \mathbf{R}(\theta_i) = \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{R}^T(\theta_i) = I.$$

Comme

$$\det \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \det I = 1 \text{ et } \det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R} = \pm 1$$

il en découle que

$$\det \mathbf{R} = \pm 1.$$

De plus, toute rotation peut être vue comme une suite de rotations infinitésimales  $d\theta_i$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(d\theta_i) &= I + O(d\theta_i) \\ \det \mathbf{R}(d\theta_i) &= 1 + O(d\theta_i) \end{aligned}$$

et une rotation finie ne peut avoir un déterminant  $-1$ . Finalement, il en ressort que  $\mathbf{R}$  est une matrice  $3 \times 3$ , orthogonale et unimodulaire (ou spéciale) et est donc un élément du groupe  $SO(3)$ .

Comparons maintenant le groupe  $SO(3)$  au groupe des spins,  $SU(2)$ . Sous une rotations les états de spins  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  se transforment en utilisant les matrices  $2 \times 2$  de la forme  $e^{i\mathbf{J}\cdot\theta}$  où  $\mathbf{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont les matrices de Pauli. On remarque qu'une rotation de  $\theta = 2\pi$  autour de l'axe des  $z$  inverse les états de spin

$$e^{i\mathbf{J}\cdot\theta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = e^{i\pi\sigma_z} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

alors que la rotation par un angle  $\theta = 4\pi$  laisse les états de spin intacts

$$e^{i\mathbf{J}\cdot\theta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = e^{i2\pi\sigma_z} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il y a donc une correspondance 2 à 1 entre les rotations en 3D (groupe  $SO(3)$ ) et les

transformations  $SU(2)$ . On dit alors que le groupe  $SO(3)$  est homomorphe à  $SU(2)$ .

## Groupe $U(1)$

$U(1)$  est le groupe le plus simple. Il inclut l'ensemble de tous les facteurs de phase complexes  $U(H) = e^{iH}$ , où  $H$  est un paramètre scalaire réel. La règle de composition est la multiplication:

$$\begin{aligned} U(H)U(H') &= e^{iH}e^{iH'} \\ &= e^{i(H+H')} \\ &= U(H+H') \\ &= U(H')U(H) \end{aligned}$$

À l'instar des groupes de la section suivante, ce groupe est commutatif ou abélien puisque ces éléments commutent.

## Groupe $SU(N)$

Les éléments du groupe  $SU(N)$  sont représentés par des matrices  $N \times N$  unitaires, dont le déterminant est égal à 1. Le groupe  $SU(N)$  lui-même est caractérisé par  $N^2 - 1$  paramètres indépendants, notés  $K_i$ . Les éléments du groupe sont représentés par:

$$\begin{aligned} U &= e^{iL} = e^{iK_j L_j} \\ &= e^{i(K_1 L_1 + K_2 L_2 + K_3 L_3 + \dots)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, 3, \dots, N^2 - 1 \\ K_j &= \text{paramètres réels} \\ L_j &= \text{matrices } N \times N \text{ hermitiques,} \\ &\quad \text{appelées } \textit{générateurs} \text{ du groupe} \end{aligned}$$

Les générateurs du groupe obéissent à la relation:

$$[L_i, L_j] = if_{ijk}L_k \tag{6.6}$$

où les  $f_{ijk}$  sont les constantes de structure du groupe.

La plus petite représentation irréductible (i.e., qui ne contient pas de sous-espace invariant) et non-triviale du groupe est de dimension  $N$ . On la nomme *représentation fondamentale* du groupe:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Les  $N^2 - 1$  générateurs d'un groupe  $SU(N)$  peuvent être regroupés en deux catégories:

1. les opérateurs hermitiques diagonaux dont le nombre maximal est  $N - 1$  (le rang est donc  $N - 1$ );
2. les opérateurs de création et d'annihilation qui sont donc au nombre de  $N(N - 1)$ .

### Le groupe $SU(2)$

Regroupons maintenant les propriétés du groupe  $SU(2)$  décrites plus haut. La représentation fondamentale du groupe  $SU(2)$  est un doublet:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

En fait, tout état peut donc être construit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs de base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les générateurs sont proportionnels aux trois matrices de Pauli (i.e.  $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ ):

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

On note qu'un seul générateur est diagonal puisque le rang est de 1.

De plus, tout élément de  $SU(2)$  peut s'écrire

$$U(K_1, K_2, K_3) = e^{i(K_1 J_1 + K_2 J_2 + K_3 J_3)}. \quad (6.10)$$

Une transformation arbitraire de  $X$  est alors notée:

$$X \rightarrow X' = U(K_1, K_2, K_3) X. \quad (6.11)$$

Les constantes de structure de  $SU(2)$  sont les composantes du tenseur antisymétrique de Levi-Civita:

$$f_{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.12)$$

Les trois générateurs peuvent être regroupés sous la forme:

1. opérateur hermitique diagonal:  $J_3$ ;
2. opérateur de création:  $J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + iJ_2)$ ;

3. opérateur d'annihilation:  $J_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - iJ_2)$ .

Il est facile de démontrer que  $J_\pm$  a pour effet d'élever ou de réduire d'une unité la valeur propre de  $J_3$  d'un état. Posons un état  $|m\rangle$  tel que

$$J_3 |m\rangle = m |m\rangle.$$

Alors en utilisant la relation de commutation

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_3 J_\pm |m\rangle &= J_\pm J_3 |m\rangle \pm J_\pm |m\rangle \\ &= (m \pm 1) J_\pm |m\rangle. \end{aligned}$$

On en conclut donc que l'état  $J_\pm |m\rangle$  a la valeur propre  $(m \pm 1)$  et correspond à l'état  $|m \pm 1\rangle$ . Sur un axe représentant les valeurs propres de  $J_3$  (ou encore les états propres), on note l'action des opérateurs de création et d'annihilation sur les états propres (voir figure 6.4). Ceux-ci qui élèvent ou réduisent les valeurs propres (e.g. spin, isospin,...).

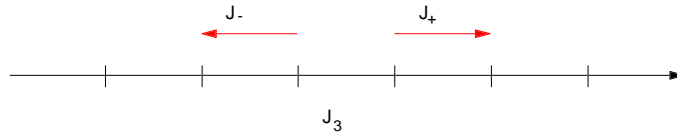


Figure 6.4 Action des opérateurs de création et d'annihilation sur les états propres.

Certains opérateurs commutent avec tous les générateurs du groupe. On les appelle les opérateurs de Casimir. Dans le cas de  $SU(2)$ , un seul opérateur de Casimir est défini:

$$C = \mathbf{J}^2 = J_+ J_- + J_- J_+ + J_3^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2.$$

Il est facile de déterminer la valeur de cet opérateur. Posons par exemple un état de spin  $|m_{\max}\rangle$  dont la troisième composante est maximale dans le multiplet de spin  $J$ . Alors

$$J_3 |m_{\max}\rangle = m_{\max} |m_{\max}\rangle$$

où  $m_{\max} = J$  et l'opérateur de Casimir qui agit sur cet état donne

$$\begin{aligned} C |m_{\max}\rangle &= (J_+ J_- + J_- J_+ + J_3^2) |m_{\max}\rangle \\ &= m_{\max} (m_{\max} + 1) |m_{\max}\rangle \\ &= J(J + 1) |m_{\max}\rangle \end{aligned}$$

## Le groupe $SU(3)$

La représentation fondamentale, souvent simplement dénotée par  $\mathbf{3}$ , du groupe  $SU(3)$  est un triplet:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Tout état peut donc être construit comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les huit générateurs  $T_a$  obéissent aux relations

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= -if_{abc}T_c \\ \{T_a, T_b\} &= \frac{1}{3}\delta_{ab} + d_{abc}T_c \end{aligned}$$

où  $f_{abc}$  et  $d_{abc}$  sont les constantes de structures antisymétrique et symétrique respectivement. On écrit souvent les générateurs du groupe  $SU(3)$  en terme des matrices de Gell-Mann

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}.$$

Les huit matrices de Gell-Mann sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est possible de faire ressortir le sous-groupe  $SU(2)$  de  $SU(3)$  en éliminant des matrices  $3 \times 3$  les rangées et colonnes qui ne contiennent que des zéros. On retrouve en effet les deux premières matrices de Pauli à l'intérieur de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de  $\lambda_4$  et  $\lambda_5$ , et de  $\lambda_6$  et  $\lambda_7$ , respectivement. Ces trois couples de matrices forment donc respectivement des sous-groupes  $SU(2)$  qui sont appelés le sous-groupe d'isospin (ou  $I$ -spin), le sous-groupe de  $V$ -spin et le sous-groupe de  $U$ -spin.

Les huit générateurs peuvent encore une fois être regroupés en deux catégories:

1. Opérateurs hermitiques diagonaux :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2}\lambda_3 \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \end{aligned}$$

$SU(3)$  est donc de rang 2.



2. Opérateurs de création/annihilation:

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$$

$$V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$$

$$U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7).$$

De la même façon qu'on identifie le couple d'opérateurs de création/annihilation de  $SU(2)$  à des opérateurs de transformation entre les quarks  $u$  et  $d$ , on peut aussi associer les opérateurs de création/annihilation de  $SU(3)$  à des opérateurs de transformation pour les couples suivants:

$$I_{\pm} : (u, d)$$

$$V_{\pm} : (d, s)$$

$$U_{\pm} : (u, s).$$

souvent appelés  $I$ -spin,  $V$ -spin et  $U$ -spin respectivement.

Les vecteurs de base ont les valeurs propres suivantes:

	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$I_3$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$
$Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Les vecteurs de base de la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  sont souvent représentés par leur position sur un *diagramme de poids* dont les axes correspondent aux valeurs des opérateurs  $I_3$  et  $Y$  (voir figure 6.5). De façon générale, les représentations irréductibles

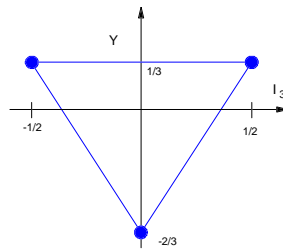


Figure 6.5 Diagramme de poids des vecteurs de base de la représentation fondamentale de  $SU(3)$ .

de dimensions supérieures sont obtenues en combinant la représentation fondamentale. Les opérateurs de  $I$ -spin,  $V$ -spin et  $U$ -spin (création/annihilation) permettent de se déplacer sur le diagramme de poids (voir figure 6.6).

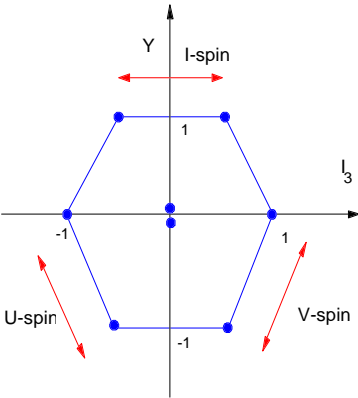


Figure 6.6 Diagramme de poids de l'octet: on note l'action des opérateurs de création/annihilation.

Dans le cas de  $SU(3)$ , l'opérateur de Casimir est défini:

$$C = T_a T^a = \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+) + I_3^2 + \frac{1}{2} (U_+ U_- + U_- U_+) + \frac{1}{2} (V_+ V_- + V_- V_+) + \frac{3}{4} Y^2.$$

On peut déterminer la valeur de cet opérateur en considérant un état  $|\chi_{\max}\rangle$  dont la troisième composante d'isospin ( $I_3$ ) et d'hypercharge ( $Y$ ) sont à leur valeurs maximales dans le multiplet. Alors

$$\begin{aligned} I_3 |\chi_{\max}\rangle &= m_{\max} |\chi_{\max}\rangle \\ Y |\chi_{\max}\rangle &= Y_{\max} |\chi_{\max}\rangle \end{aligned}$$

et l'opérateur de Casimir qui agit sur cet état donne

$$C |\chi_{\max}\rangle = \left( I_3^2 + 2I_3 + \frac{3}{4} Y^2 \right) |\chi_{\max}\rangle.$$

Les constantes de structure de  $SU(3)$  sont quant à elles données par:

$$f_{123} = 1 \quad (6.14)$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2} \quad (6.15)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.16)$$

alors que

$$f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj} \quad f_{ijj} = f_{ijj} = 0.$$

## 6.3 Quarks et Représentations $SU(N)$

### Lien entre représentation $SU(N)$ et modèle des quarks

Du point de vue mathématique, l'idée de base derrière le modèle des quarks est d'identifier les composantes de la représentation fondamentale d'un groupe avec les différents saveurs de quarks. Ainsi, si on ne regardait que les multiplets d'isospin, il serait approprié de considérer le groupe  $SU(2)$ :

$$SU(2) : X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

qui nécessite seulement deux quarks.

Pendant, les hadrons sont en général décrit par deux étiquettes: la troisième composante d'isospin et l'hypercharge. Ceci implique donc un groupe de rang 2 (deux opérateurs hermitiques, donc deux valeurs propres réelles). Le choix du groupe pointe tout naturellement vers une extension du groupe d'isospin, c'est-à-dire le groupe  $SU(3)$  dont

la représentation fondamentale est un triplet,

$$SU(3) : X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

formé de trois quarks.

Les états physiques (baryons et mésons) sont obtenus à partir des représentations de dimensions supérieures.

### 1. Baryons:

Les baryons sont des états à trois quarks. Dans le modèle original à trois saveurs, on forme donc le produit de la représentation  $\mathbf{3}$  avec elle-même:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{27} \quad (6.19)$$

Cette nouvelle représentation (à laquelle on associe 27 états) est cependant réductible. Elle peut se décomposer en représentations irréductibles, sous la forme:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{1} \quad (6.20)$$

En couplant les trois triplets originaux, on peut donc former un décuplet  $\mathbf{10}$ , 2 octets  $\mathbf{8} \oplus \mathbf{8}'$  et un singulet  $\mathbf{1}$  (i.e., les multiplets d'isospin et d'étrangeté)

### 2. Mésons:

Les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquark. Notant  $\bar{\mathbf{3}}$  la représentation conjuguée à  $\mathbf{3}$ , on obtient:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (6.21)$$

Cette fois-ci, les représentations irréductibles formées sont un octet et un singulet.

Chaque multiplet formé est caractérisé par ses propriétés de symétrie: il est symétrique, antisymétrique ou à symétrie mixte sous l'échange de deux de ses composantes.

## Représentations irréductibles et Tableaux de Young

Les résultats précédents sur les représentations irréductibles ont été cités sans plus d'explications. On est en droit de se demander d'où ils proviennent. Pourquoi  $\mathbf{27}$  est-il réductible? Comment se décompose-t-il en  $\mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{1}$ ? etc... En général, la combinaison des représentations et leurs propriétés ne sont pas évidente à première vue.

Mais revenons tout d'abord sur les représentations irréductibles de  $SU(3)$ . Nous connaissons déjà le triplet

$$X_i$$

et l'octet qui peut s'écrire comme le produit de deux triplets où on s'est assuré que la trace est nulle, i.e.

$$X_{ij} = X_i X_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} X_k X_k.$$

De manière plus générale, on construit des multiplets de représentation irréductible en utilisant la procédure suivante:

1. Construire les tenseurs  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  en général comme des produits de la représentation fondamentale  $X_i$ .
2. Symétriser par rapport aux indices  $i_1 \dots i_p$  et  $j_1 \dots j_q$ .
3. Soustraire les traces de manière à ce que la contraction des indices du tenseur soit nulle

$$\delta_{i_1 j_1} X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0.$$

Le tenseur qui en résulte forme alors une représentation irréductible  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  caractérisée par les entiers  $(p, q)$ . Il est facile de trouver la dimension de cette représentation en calculant le nombre de composantes indépendantes de ce tenseur. Rappelons que chaque indice  $i_a$  ou  $j_b$  ne peut prendre que trois valeurs (1, 2 ou 3) dans le groupe  $SU(3)$ . Alors le nombre de façons de combiner les indices  $i_1 \dots i_p$  correspond aux nombres de combinaisons

$$\binom{p}{2} = \frac{(p+2)!}{p!2!} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}.$$

Il y a donc

$$N(p, q) = \frac{(p+2)(p+1)(q+2)(q+1)}{4}$$

combinaisons différentes du tenseur  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  en général. Mais la condition de trace nulle impose que tous les tenseurs contractés d'un indice sont nuls. Après contraction, il ne reste que  $N(p-1, q-1)$  combinaisons différentes pour  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  qui sont alors tous nuls. Le nombre de degré de liberté ou la dimension du tenseur est donc

$$\begin{aligned} D(p, q) &= N(p, q) - N(p-1, q-1) \\ &= (p+1)(q+1) \left( \frac{p+q}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$

On peut donc caractériser les représentations de  $SU(3)$  par le couple d'entiers  $(p, q)$ .

Représentation	Dimension
$(p, q)$	$D(p, q)$
(0, 0)	1 : singulet
(1, 0)	3 : triplet
(0, 1)	3 : triplet
(1, 1)	8 : octet
(3, 0)	10 : décuplet
(2, 2)	27

Par déduction, il nous a été possible de construire des représentations de dimensions supérieures en prenant des produits directs de la représentation fondamentale. Les propriétés de réductibilité des représentations n'a toutefois pas été abordé. Heureusement, il existe des méthodes systématiques pour construire représentations irréductibles et en déterminer les symétries dont la plus simple est sans nul doute la méthode des *tableaux de Young*. Elle procède comme suit:

On identifie d'abord la représentation fondamentale  $\mathbf{N}$  du groupe par une case et la représentation fondamentale conjuguée  $\bar{\mathbf{N}}$  par une colonne de  $N - 1$  cases:

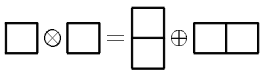
$$\mathbf{N} : \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (6.22)$$

$$\bar{\mathbf{N}} : \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \quad (6.23)$$

On forme les représentations de dimension supérieure en juxtaposant de toutes les façons possibles ces cases, tout en respectant les conditions suivantes:

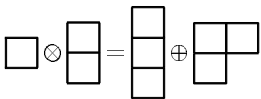
1. Le nombre de cases par colonne doit aller en ordre décroissant vers la droite.
2. Le nombre de cases par ligne doit aller en ordre décroissant vers le bas.

**Exemple 6.1**  
 $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$



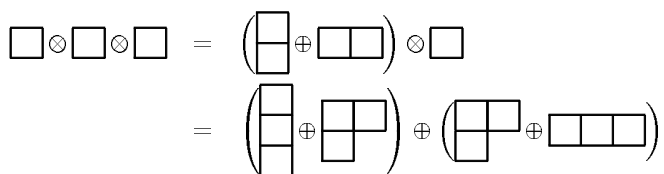
$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.24)$$

**Exemple 6.2**  
 $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$



$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (6.25)$$

**Exemple 6.3**  
 $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 10$



$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square &= \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square \\ &= \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \end{aligned}$$

On peut associer à chacune des combinaisons de cases (i.e., à chacun des tableaux de Young) obtenues ci-haut une représentation irréductible. On détermine dans chaque cas leur état de symétrie et leur dimension grâce aux règles suivantes:

**Symétrie:**

On pourrait assigner à chacune des cases une étiquette (e.g.  $a, b, c, \dots$ ). Alors une représentation (par exemple, un tenseur portant les étiquettes  $a, b, c, \dots$ ) est déterminée par les étiquettes du tableau de Young. De manière générale, une représentation est alors anti-symétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même colonne et symétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même ligne.

Regardons de nouveau le premier exemple,  $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$ . Si la représentation fondamentale est décrite par le vecteur  $\phi_a$  et la représentation conjuguée par  $\phi_b$ , alors la

combinaison de deux représentations fondamentale peut s'écrire

$$\begin{aligned}\phi_a \phi_b &= \frac{1}{2} (\phi_a \phi_b - \phi_a \phi_b) + \frac{1}{2} (\phi_a \phi_b + \phi_a \phi_b) \\ &= A_{ab} + S_{ab}\end{aligned}$$

où  $A_{ab}$  et  $S_{ab}$  sont antisymétrique et symétrique sous  $a \leftrightarrow b$  et de dimensions 3 et 6 respectivement.

$$\begin{aligned}A_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a \phi_b - \phi_a \phi_b) \\ S_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a \phi_b + \phi_a \phi_b)\end{aligned}$$

Les tableaux de Young nous permettent d'obtenir ces résultats sans construire explicitement les représentations. En assignant cette fois-ci des étiquettes à chaque case:

$$\boxed{a} \otimes \boxed{b} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \boxed{a \ b} \quad (6.26)$$

où la représentation  $\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$  est le triplet conjugué  $\bar{\mathbf{3}}$  (dimension 3) antisymétrique sous  $a \leftrightarrow b$  alors que  $\boxed{a \ b}$  est le sextuplet  $\mathbf{6}$  (dimension 6) symétrique sous  $a \leftrightarrow b$ .

Les tableaux de Young comportant une seule ligne sont associés à une représentation complètement symétrique. Les tableaux de Young comportant une seule colonne sont associés à une représentation complètement antisymétrique. Les autres tableaux correspondent quant à eux à des symétries mixtes. Par exemple, si on assigne au tableau suivant les indices  $a, b$  et  $c$  :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \quad (6.27)$$

alors la représentation correspondante sera symétrique par rapport à l'échange des indices  $a$  et  $b$  mais, antisymétrique par rapport à l'échange des indices  $a$  et  $c$ .

## Dimension d'une représentation

La dimension d'une représentation est donnée par le rapport de deux nombres, qui sont évalués comme suit:

1. Numérateur: Pour calculer le numérateur, on associe d'abord le nombre  $N$  (dimension du groupe  $SU(N)$ ) à la première case en haut à gauche et aux autres cases de la diagonale. On associe les nombres  $N + 1, N + 2, N + 3, \dots$  aux cases suivantes et les nombres  $N - 1, N - 2, N - 3, \dots$  aux cases précédentes sur chacune des lignes. Le numérateur est alors donné par le produit de tous ces nombres.
2. Dénominateur: À partir de chacune des cases du tableau, on trace une ligne vers la droite et une ligne vers le bas, puis on compte le nombre total de cases croisées par ces deux lignes. On répète pour chacune des cases du tableau et on obtient le dénominateur en faisant le produit de tous ces nombres.



**Exemple 6.4**

Prenons le tableau de Young suivant:

$N$	$N + 1$	$N + 2$
$N - 1$	$N$	
$N - 2$	$N - 1$	

(6.28)

alors le numérateur est donné par

$$N \cdot (N + 1) \cdot (N + 2) \cdot (N - 1) \cdot N \cdot (N - 2) \cdot (N - 1) \tag{6.29}$$

Le calcul du dénominateur assigne les nombres suivants à chacune des cases:

5	4	1
3	2	
2	1	

(6.30)

alors le dénominateur est donné par

$$5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \tag{6.31}$$

La dimension de la représentation est alors

$$D = \frac{N^2 \cdot (N + 1) \cdot (N + 2) \cdot (N - 1)^2 \cdot (N - 2)}{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \tag{6.32}$$



**Exemple 6.5**

Pour prendre un exemple concret, considérons les représentations obtenues par le produit  $3 \otimes 3 \otimes 3$ :

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{6.33}$$

1. États complètement symétriques (S):

□	□	□
---	---	---

(6.34)

Ici, la dimension est donnée par

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N + 1) \cdot (N + 2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \end{aligned}$$

et correspond donc à un décuplet complètement symétrique.

2. États à symétrie mixte (M):

□	□
□	□

(6.35)

Le calcul de la dimension donne

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N + 1) \cdot (N - 1)}{3 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 8 \end{aligned}$$

ce qui correspond à un octet à symétrie mixte.



3. État complètement antisymétrique (A):

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (6.36)$$

Le calcul de la dimension donne

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

ce qui correspond à un singulet complètement antisymétrique.

Finalement on a de façon schématique:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}'_M \oplus \mathbf{1}_A \quad (6.37)$$

## Construction des fonctions d'onde

### Baryons

Considérons maintenant plus en détail la façon dont on forme les fonctions d'onde associées aux baryons  $SU(3)$ , obtenus par combinaison de 3 quarks de 3 saveurs différentes ( $u, d, s$ ).

Le système de 3 quarks, chacun provenant d'un triplet  $\mathbf{3}$  de saveur de  $SU(3)$ , est construit par la combinaison

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}.$$

Par la méthode des tableaux de Young, on détermine les représentations irréductibles générées par ces combinaisons:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.38)$$

c'est-à-dire,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}'_M \oplus \mathbf{1}_A \quad (6.39)$$

Les 27 états sont représentés dans les tableaux suivants. Il est alors facile d'associer un baryon à chacun de ces états. Le décuplet  $\mathbf{10}_S$  correspond aux particules avec  $J^P = \frac{3}{2}^+$

**3 quarks  $SU(3)$ , états symétriques ( $J^P = \frac{3}{2}^+$ )**

Constituants	$10_S$
$\Delta^{++}(uuu)$	$uuu$
$\Delta^+(uud)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
$\Delta^0(udd)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$
$\Delta^-(ddd)$	$ddd$
$\Sigma^{*+}(uus)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$
$\Sigma^{*0}(uds)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dsu + sud + usd + sdu + dus)$
$\Sigma^{*-}(dds)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$
$\Xi^{*0}(uss)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$
$\Xi^{*-}(dss)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$
$\Omega^-(sss)$	$sss$

Le diagramme de poids du décuplet  $10_S$  est illustré à la figure 6.7

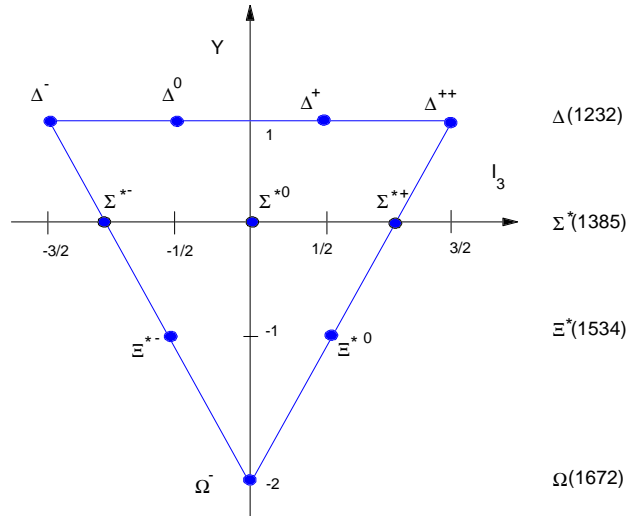


Figure 6.7 Diagramme de poids du décuplet de baryons ( $J^P = \frac{3}{2}^+$ ).

L'octet  $8_M$  correspond aux particules avec  $J^P = \frac{1}{2}^+$

**3 quarks  $SU(3)$ , états mixtes ( $J^P = \frac{1}{2}^+$ )**

Constituants	$\mathbf{8}_M$
$p(ud)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$
$n(ud)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$
$\Sigma^+(uus)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)u$
$\Sigma^0(uds)$	$\frac{1}{2}(dsu + usd - s(ud + du))$
$\Sigma^-(dds)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)d$
$\Lambda^0(uds)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(s(du - ud) + usd - dsu - 2(du - ud)s)$
$\Xi^-(dss)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)s$
$\Xi^0(uss)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)s$

Le diagramme de poids du  $\mathbf{8}_M$  est illustré à la figure 6.8 L'octet  $\mathbf{8}'_M$  correspond à des

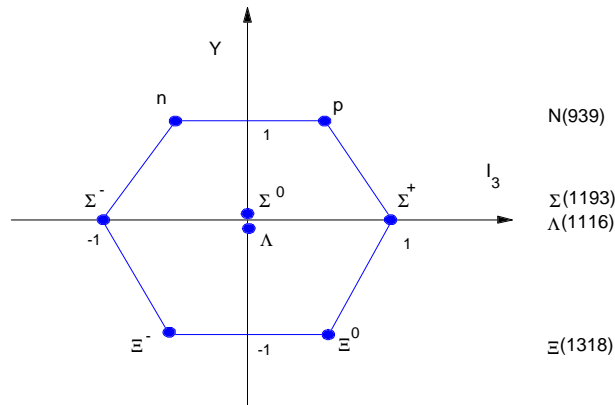


Figure 6.8 Diagramme de poids de l'octet de baryons ( $J^P = \frac{1}{2}^+$ ).

baryons plus lourds.

**3 quarks  $SU(3)$ , états mixtes**

Constituants	$\mathbf{8}_{M,S}$
$uud$	$\frac{1}{\sqrt{6}}((ud + du)u - 2uud)$
$udd$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}((ud + du)d - 2ddu)$
$uus$	$\frac{1}{\sqrt{6}}((us + su)u - 2uus)$
$uds$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(s(du + ud) + dsu + usd - 2(ud + du)s)$
$dds$	$\frac{1}{\sqrt{6}}((ds + sd)d - 2dds)$
$uds$	$\frac{1}{2}(dsu - usd + s(du - ud))$
$dss$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}((ds + sd)s - 2ssd)$
$uss$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}((us + su)s - 2ssu)$

Finalement, le singlet  $\mathbf{1}_A$  correspond à la particules  $\Lambda(1405)$

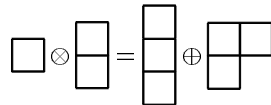
**3 quarks  $SU(3)$ , états antisymétriques**

Constituants	$\mathbf{1}_A$
$us\bar{d}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(s(du - ud) + (us\bar{d} - dsu) + (du - ud)s)$

**Mésons pseudo-scalaires**

Les mésons sont construits par la combinaison de quarks et d'antiquarks (avec des spins anti-alignés et moment orbital  $l = 0$ ) qui correspond aux représentations fondamentale et à son conjugué (e.g.  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$  pour  $SU(3)$ ).

Par la méthode des tableaux de Young, on obtient les représentations irréductibles suivantes:



$$\square \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.40)$$

soit

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \quad (6.41)$$

c'est-à-dire un singlet antisymétrique dans l'échange de saveurs et un octet symétrique.

Il est donc possible de reconstituer les états comme suit: L'octet  $\mathbf{8}_M$

**quark-antiquark dans  $SU(3)$ , états mixtes**

Constituants	$\mathbf{8}_M$
$\pi^+(u\bar{d})$	$u\bar{d}$
$\pi^0(u\bar{u}, d\bar{d})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$
$\pi^-(d\bar{u})$	$d\bar{u}$
$K^+(u\bar{s})$	$u\bar{s}$
$K^0(d\bar{s})$	$d\bar{s}$
$\bar{K}^0(s\bar{d})$	$s\bar{d}$
$K^-(s\bar{u})$	$s\bar{u}$
$\eta_8(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$

et le singlet  $\mathbf{1}_A$

**quark-antiquark dans  $SU(3)$ , états antisymétriques**

Constituants	$\mathbf{1}_A$
$\eta_1(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$

Le diagramme de poids de l'octet et du singlet de mésons pseudo-scalaires i.e. de spin et parité  $J^P = 0^-$  est illustré à la figure 6.9

On note que les états  $\eta_1$  et  $\eta_8$  qui proviennent du singlet et de l'octet respectivement ont les mêmes nombres quantiques et sont formés des mêmes quarks. La seule propriétés qui les distingue est la symétrie sous le changement de saveurs. Dans un tel cas, il est possible que les états propres de masse notamment  $\eta(549)$  et  $\eta'(958)$  soient des combinaisons linéaires de  $\eta_1$  et  $\eta_8$ . Alors, on peut écrire

$$\begin{vmatrix} \eta \\ \eta' \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{vmatrix} = R^{-1} \begin{vmatrix} \eta \\ \eta' \end{vmatrix}$$

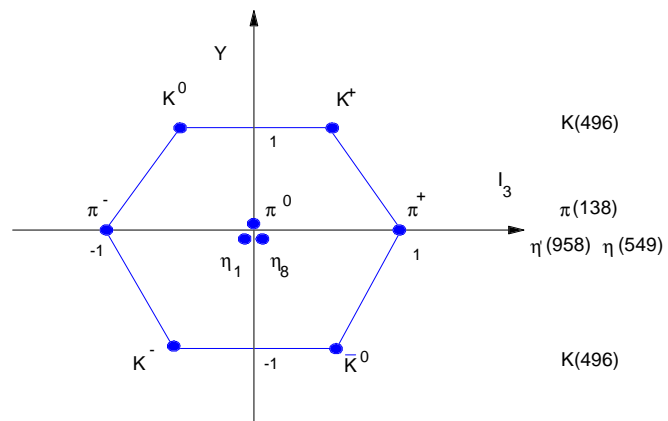


Figure 6.9 Diagramme de poids de l'octet et du singlet de mésons ( $J^P = 0^-$ ).

où  $R$  est une matrice de mélange (rotation) définie par

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_P & \sin \theta_P \\ -\sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'hamiltonien au repos (masse) est diagonal pour les états propres de masses obéissent à

$$\left\langle \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \middle| H \middle| \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \middle| \begin{pmatrix} m_\eta^2 & 0 \\ 0 & m_{\eta'}^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \right\rangle$$

alors que la même valeur moyenne, mais cette fois évaluée en utilisant les états  $\eta_1$  et  $\eta_8$  comme base s'écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_8 \end{array} \middle| H \middle| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_8 \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_8 \end{array} \middle| \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{18}^2 \\ m_{81}^2 & m_{88}^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_8 \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \middle| R \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{18}^2 \\ m_{81}^2 & m_{88}^2 \end{pmatrix} R^{-1} \middle| \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

Il en découle que  $m_{18}^2 = m_{81}^2$  et

$$\begin{aligned} m_\eta^2 &= m_{11}^2 \cos^2 \theta_P - 2m_{18}^2 \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{88}^2 \sin^2 \theta_P \\ m_{\eta'}^2 &= m_{11}^2 \sin^2 \theta_P + 2m_{18}^2 \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{88}^2 \cos^2 \theta_P \\ 0 &= (m_{11}^2 - m_{88}^2) \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{18}^2 (\sin^2 \theta_P - \cos^2 \theta_P) \end{aligned}$$

En éliminant  $m_{11}^2$  et  $m_{18}^2$  des relations précédentes, on obtient une expression pour l'angle de mélange

$$\tan^2 \theta_P = \frac{m_{88}^2 - m_\eta^2}{m_{\eta'}^2 - m_{88}^2}.$$

d'où on tire que  $m_\eta^2 < m_{88}^2 < m_{\eta'}^2$ . De plus

$$\tan \theta_P = \frac{m_{88}^2 - m_\eta^2}{m_{18}^2} > 0$$

ce qui implique que  $\theta_P > 0$ . On trouve expérimentalement  $\theta_P = 11^\circ$ .

## Mésons vectoriels

Les mésons vectoriels sont formés de paires quark-antiquark avec des spin alignés et moment orbital  $l = 0$ .

Un diagramme de poids similaire peut servir à illustrer les mésons vectoriels, i.e. de spin et parité  $J^P = 1^-$  (voir figure 6.10). On note encore une fois que les états  $\phi_1$  et  $\phi_8$  qui proviennent du singulet et de l'octet respectivement ont les mêmes nombres quantiques et sont formés des mêmes quarks. Il y a donc possibilité de mélange tout comme dans le cas des mésons pseudo-scalaires. De façon analogue, on obtient les relations

$$\tan^2 \theta_V = \frac{m_{88}^2 - m_\phi^2}{m_\omega^2 - m_{88}^2}$$

avec

$$\tan \theta_V = \frac{m_{88}^2 - m_\phi^2}{m_{18}^2}$$

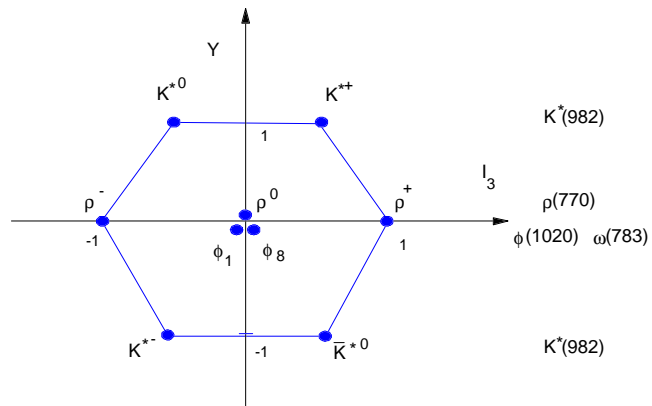


Figure 6.10 Diagramme de poids de l'octet et du singlet de mésons ( $J^P = 1^-$ ).

Expérimentalement,  $\theta_V \approx 40^\circ$  Mais rappelons que

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \\ \phi_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})\end{aligned}$$

Le mélange implique donc que

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 \cos \theta_V + \phi_8 \sin \theta_V \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \cos \theta_V + \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \sin \theta_V \\ \omega &= -\phi_1 \sin \theta_V + \phi_8 \cos \theta_V \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \sin \theta_V + \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \cos \theta_V\end{aligned}$$

Considérons le cas du *mélange idéal* : Pour  $\sin \theta_V = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , le contenu de  $\phi$  est purement dû au quark étrange alors que  $\omega$  est constitué de quark  $u$  et  $d$ :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_1 - \sqrt{2}\phi_8) = s\bar{s} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}\phi_1 + \phi_8) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}).\end{aligned}$$

## 6.4 Couleur

L'introduction de la *couleur* comme nombre quantique supplémentaire pour décrire un quark avait pour but de résoudre un paradoxe. En effet, les quarks possédant un spin demi-entier, il est naturel de les considérer comme des fermions. Mais alors le principe d'exclusion de Pauli semblerait suggérer que des hadrons *exotiques* tels que le  $\Delta^{++}$  et le  $\Omega^-$  ne peuvent exister. Ils consistent respectivement de trois quarks  $u$  et de trois quarks  $s$  et possèdent un spin égal à  $\frac{3}{2}$ . Les spins des trois quarks sont donc nécessairement alignés, ce qui implique qu'ils possèdent tous les trois les mêmes nombres quantiques. La seule façon de résoudre ce paradoxe sans modifier profondément le modèle des quarks est de postuler l'existence d'une dégénérescence supplémentaire. Le nombre quantique associé à cette dégénérescence fut nommée *couleur*.

### Groupe $SU(3)$ de Couleur

En supposant l'existence de trois couleurs différentes (rouge, vert et bleu), on peut poser une règle simple qui assure qu'aucun quark isolé ne puisse être observé:

*Tous les états observables doivent être des singulets de couleur — aucun multiplet de dimension supérieure n'est permis.*

Un tel singulet peut être construit de deux façons: en combinant un quark coloré avec un antiquark possédant l'anticouleur correspondante (chacun des trois couleurs étant éga-



lement représentées) ou encore en combinant trois quarks ou antiquarks de couleurs différentes (un rouge, un vert et un bleu).

Cette règle s'inscrit à l'intérieur d'une théorie de jauge basée sur la couleur: la chromodynamique quantique (ou QCD). Comme toute théorie de jauge, elle est fondée sur un postulat d'invariance: le *monde* est invariant sous une transformation locale de couleur. Le groupe de symétrie associé à cette transformation est le groupe  $SU_c(3)$ , où l'indice  $c$  sert à le distinguer du groupe  $SU(3)$  de saveur.

Contrairement à la symétrie de saveur, qui est une symétrie brisée (en raison de la différence de masse entre les quarks up, down et étrange) et globale, la symétrie  $SU_c(3)$  est une symétrie exacte et *locale*. Par *locale*, on entend que la transformation considérée dépend de l'espace et du temps. Les particules qui assurent la symétrie locale de couleur sont au nombre de huit et sont nommées *gluons*.

Par exemple, un quark donné peut changer de couleur indépendamment des autres quarks qui l'entourent, mais chaque transformation doit obligatoirement s'accompagner de l'émission d'un gluon (de la même façon qu'un électron changeant de phase émet un photon). Le gluon émis se propage et est réabsorbé par un autre quark dont la couleur variera de telle façon que le changement initial soit compensé. On retrouve donc ici notre règle selon laquelle tout hadron demeure incolore.

Pour citer un exemple concret, supposons qu'un quark rouge se transforme en quark bleu. Pour cela, il devra émettre un gluon rouge-antibleu, qui une fois absorbé par un quark bleu le transformera à son tour en quark rouge. La couleur globale est alors conservée, puisque le nombre total de quarks d'une couleur donnée sera le même avant et après le processus.

Les gluons agissent donc en quelque sorte comme les agents de la force forte à l'intérieur du hadron. La force forte *conventionnelle* qui s'exerce entre deux hadrons différents n'est qu'une interaction résiduelle par rapport à cette force originale, comme la force de Van der Waals l'est par rapport à la force électromagnétique entre deux charges électriques.

## Fonctions d'onde de couleur

Avec l'introduction du nombre quantique de couleur, on peut représenter la fonction d'onde totale  $\psi$  d'un hadron sous la forme:

$$\psi = \psi(\textit{spin}) \cdot \psi(\textit{spatial}) \cdot \psi(\textit{saveur}) \cdot \psi(\textit{couleur}) \quad (6.42)$$

Pour le baryons, la fonction d'onde  $\psi(\textit{couleur})$  est représentée symboliquement par la combinaison complètement antisymétrique suivante:

$$\psi(\textit{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(RVB + BRV + VBR - RBV - BVR - VRB) \quad (6.43)$$

L'échange de deux quarks (par exemple, les deux premiers) donnera:

$$\begin{aligned} \psi(\textit{couleur}) &\rightarrow \psi'(\textit{couleur}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(VRB + RBV + BVR \\ &\quad - BRV - VBR - RVB) \end{aligned}$$

$$= -\psi(\text{couleur})$$

Pour les mésons, la fonction d'onde sera symétrique (puisque ce sont des bosons):

$$\psi(\text{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + V\bar{V} + B\bar{B}). \quad (6.44)$$

## Évidence expérimentale

L'hypothèse de l'existence de la couleur est supportée par l'expérience. Par exemple, lors d'annihilations électron-positron on observe que les particules produites peuvent être, soit une paire muon-antimuon, soit une paire quark-antiquark se transformant en jets de baryons. La section efficace  $\sigma$  pour ce dernier processus sera:

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) \\ &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_1\bar{q}_1) + \sigma(e^+e^- \rightarrow q_2\bar{q}_2) + \dots \end{aligned}$$

où  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n =$  nombre total de types de quarks (saveur et couleur comprises).

Puisque la section efficace de Rutherford est proportionnelle au carré de la charge électrique du diffuseur, on peut écrire:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_i Q_i^2}{Q_\mu^2} \quad (6.45)$$

où  $Q_i =$  charge électrique du quark  $i$  et  $Q_\mu =$  charge électrique du muon.

Si trois saveurs de quarks — soit  $u, d$  et  $s$  — peuvent être produites (nous considérons ici que nous sommes en-dessous du seuil de création de quarks lourds), on a donc:

$$\begin{aligned} R &= \frac{Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2}{Q_\mu^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

En introduisant la couleur, ce rapport triple pour passer à  $R = 2$ .

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sum_{j=1}^3 Q_{u_j}^2 + Q_{d_j}^2 + Q_{s_j}^2}{Q_\mu^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

où  $j = 1, 2, 3$  est l'indice de couleur.

Malgré une marge d'erreur importante, les résultats expérimentaux montrent que ce rapport est près de 2 (quarks  $u, d$  et  $s$ ), en accord avec l'hypothèse de la couleur. On observe par ailleurs, des sauts dans ce rapport lorsque le seuil du quark charmé et du quark bottom est franchi ce qui porte successivement la valeur de  $R$  théorique à  $R = \frac{10}{3}$  (quarks  $u, d, s$  et  $c$ ) et  $R = \frac{11}{3}$  (quarks  $u, d, s, c$  et  $b$ ) (voir figure 6.11).

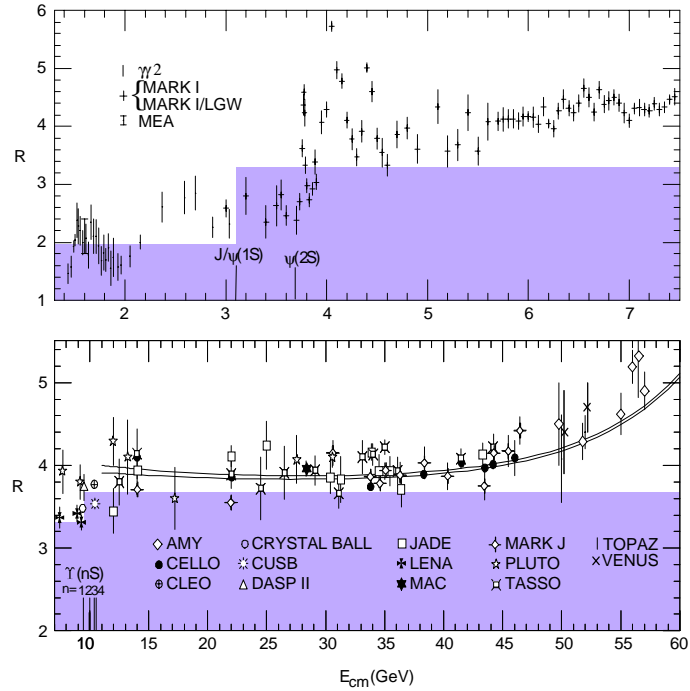


Figure 6.11 Rapport  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ : La prédiction théorique donne d'abord  $R = 2$  (quarks  $u, d$  et  $s$ ), puis  $R = \frac{10}{3}$  (quarks  $u, d, s$  et  $c$ ) et  $R = \frac{11}{3}$  (quarks  $u, d, s, c$  et  $b$ ) après le seuil de production du quark charmé et du quark bottom respectivement. La partie ombrée correspond aux plateaux successifs de  $R$ .

## 6.5 Masses et Moments Magnétiques

### Masses

Si la symétrie  $SU(3)$  de saveur était une symétrie exacte, les particules appartenant à une même représentation irréductible devraient avoir des masses identiques. Mais comme nous le révèlent les différences de masse  $\Delta m$  entre les composantes des multiplets de baryons et de mésons, la symétrie  $SU(3)$  est brisée par les interactions fortes. L'hamiltonien peut donc être séparé en deux parties:

$$H = H_1 + H_2$$

dont la première  $H_1$  est invariante sous  $SU(3)$  alors que  $H_2$  est responsable de la brisure de symétrie et donc de la différence de masse. Puisque ce sont les générateurs qui décrivent les transformations sous  $SU(3)$ , il en découle que

$$\begin{aligned} [T_a, H_1] &= 0 \\ [T_a, H_2] &\neq 0 \end{aligned}$$

où  $T_a$  est un générateur de  $SU(3)$ . Par ailleurs, les interactions fortes préservent l'isospin et l'hypercharge donc l'hamiltonien  $H_2$  responsable de la brisure doit tout de même obéir aux contraintes:

$$[\mathbf{I}, H_2] = 0 \quad \text{et} \quad [Y, H_2] = 0$$

en plus d'être sensiblement plus petit que  $H_1$  puisque la symétrie  $SU(3)$ , sans être exacte, est tout de même approximativement correcte. La forme la plus simple que  $H_2$  peut prendre est alors

$$H_2 \propto \lambda_8.$$

Okubo a démontré que les particules dans la représentation irréductible  $(p, q)$  de  $SU(3)$  dans des états de isospin-hypercharge donnés par  $I$  et  $Y$  possède les éléments de matrice suivant

$$\begin{aligned} \langle (p, q), I, Y | H_2 | (p, q), I, Y \rangle &\propto \langle (p, q), I, Y | \lambda_8 | (p, q), I, Y \rangle \\ &= a + bY + c \left[ \frac{Y^2}{4} - I(I+1) \right] \end{aligned}$$

où  $a, b, c$  = constantes indépendantes de la  $I$  et  $Y$  mais dépendent en général de la représentation  $(p, q)$ . Gell-Mann et Okubo ont proposé une formule de masse ayant la même forme:

$$m = a + bY + c \left[ \frac{Y^2}{4} - I(I+1) \right].$$

Pour l'octet de baryons, ce résultats a pour conséquences que

$$\underbrace{3m_\Lambda + m_\Sigma}_{4541 \text{ MeV}} = \underbrace{2m_N + m_\Xi}_{4514 \text{ MeV}}$$

ce qui est valide à 1% près.

Dans le cas du décuplet de baryons, on a en plus la relation suivante entre l'isospin

et l'hypercharge qui s'applique

$$I = \frac{Y}{2} + 1$$

ce qui ramène la relation de masse à

$$m = \tilde{a} + \tilde{b}Y.$$

La différence de masse dans ce cas ne dépend que de l'hypercharge; on obtient

$$\underbrace{m_{\Sigma^*} - m_{\Delta}}_{152 \text{ MeV}} = \underbrace{m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*}}_{149 \text{ MeV}} = \underbrace{m_{\Omega} - m_{\Xi^*}}_{139 \text{ MeV}}$$

en accord avec les résultats expérimentaux.

Une relation similaire peut être écrite pour les mésons. Cependant, dans ce cas, le terme de masse qui apparaît dans le lagrangien ou l'hamiltonien — c'est l'équation de Klein-Gordon qui s'applique aux bosons — est quadratique en  $m$ . La relation pour l'octet de mésons pseudo-scalaire a donc la forme

$$\underbrace{4m_K^2}_{.988 \text{ GeV}^2} = 3m_{\eta_8}^2 + \underbrace{m_\pi^2}_{0.0196 \text{ GeV}^2}$$

À noter ici que la masse qui apparaît dans la relation est celle de l'état faisant partie de l'octet  $\eta_8$  ( $m_{\eta_8}^2 = m_{88}^2$ ) et non celle de  $\eta$  ou  $\eta'$ . Cette relation permet de déterminer  $m_{88}^2$

$$m_{88}^2 = \frac{1}{3} (4m_K^2 - m_\pi^2) \simeq (568 \text{ MeV})^2$$

et l'angle du mélange  $\eta - \eta'$ , i.e.  $\theta_P$  qui prend la valeur de  $11^\circ$ .

Le traitement de l'octet de mésons vectoriels est en tous points semblables. La relation donne

$$m_{88}^2 = \frac{1}{3} (4m_{K^*}^2 - m_\rho^2) \simeq (927 \text{ MeV})^2.$$

On peut en déduire l'angle de mélange  $\omega - \phi$  mentionné plus haut dont la valeur  $\theta_V \simeq 40^\circ$  s'approche de l'angle de mélange idéal.

En principe, on faire une analyse plus détaillée de la masse des hadrons pour y inclure les corrections hyperfines et électriques qui sont dues à la brisure de la symétrie  $SU(2)$  d'isospin par les interactions électromagnétiques. Elle implique trois effets

1. la différence de masse entre les quarks  $u$  et  $d$
2. les interactions dipôle-dipôle mettent donc en jeu les moments magnétiques respectifs des quarks
3. l'énergie de Coulomb associée à la charge de quarks.

Les prédictions se révèlent en accord avec les observations à 1% près ou mieux.

La masse des quarks eux-mêmes n'est pas aussi bien définie que celles des hadrons et le modèle standard ne les prédit pas. En fait, puisqu'il est confiné de façon permanente à l'intérieur des hadrons, il n'aurait aucun sens de parler de la masse au repos d'un quark libre. On définit plutôt une masse efficace qui est obtenue à partir des masses hadroniques et qui tient compte des interactions entre quarks.

Les masses les plus simples à obtenir sont celles des quarks lourds:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{1}{2} m_{s\bar{s}} = \frac{1}{2} m_\psi = 500 \text{ MeV} \\ m_c &= \frac{1}{2} m_{c\bar{c}} = \frac{1}{2} m_{J/\psi} = 1500 \text{ MeV} \\ m_b &= \frac{1}{2} m_{b\bar{b}} = \frac{1}{2} m_\Upsilon = 4700 \text{ MeV} \\ m_t &\simeq 175 \text{ GeV} \end{aligned}$$

La masse des quarks up et down est plus difficile à évaluer, puisque l'énergie de liaison qui les unit à l'intérieur des hadrons est du même ordre de grandeur que leur masse et puisqu'il n'existe pas d'états purs  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ . Par contre, les particules  $\rho^0$  et  $\Omega$  sont formées par des combinaisons de ces deux états et ils nous donnent une masse d'environ 380 MeV pour les deux quarks (en supposant que leurs masses sont égales). On peut également poser  $m_u = m_d = \frac{1}{3} m_N = 310 \text{ MeV}$  où  $m_N$  est la masse moyenne d'un nucléon. On estime finalement:

$$m_u = m_d = 350 \text{ MeV}. \quad (6.46)$$

Cet estimé est souvent désigné sous l'appellation de masse "habillée" puisqu'elle inclut une partie de l'énergie de liaison associée aux hadrons. Par opposition on définit aussi la masse "nue" ou masse "courant" des quarks comme la masse des quarks libres ponctuels. La masse des quarks a aussi la caractéristique de dépendre logarithmiquement de l'échelle à laquelle elle est mesurée puisque selon qu'on sonde plus ou moins profondément la matière, elle nous paraîtra plus ou moins "habillée" de ses interactions. Si on fixe cette échelle à une énergie correspondant à la masse du  $Z^0$ ,  $M_Z = 91.1884 \pm 0.0022 \text{ GeV}$ , on trouve les valeurs suivantes:

<b>Masse des quarks</b>	
$m_u(M_Z)$	$3.4 \pm 0.6 \text{ eV}$
$m_d(M_Z)$	$6.3 \pm 0.9 \text{ eV}$
$m_s(M_Z)$	$118.0 \pm 17.0 \text{ MeV}$
$m_c(M_Z)$	$880.0 \pm 48.0 \text{ MeV}$
$m_b(M_Z)$	$3.31 \pm 0.11 \text{ GeV}$
$m_t(M_Z)$	$172.0 \pm 6.0 \text{ GeV}$

## Moments magnétiques

Si on considère les quarks comme des fermions de spin  $\frac{1}{2}$  et de charge électrique  $Q_i$ , leur moment magnétique  $\mu_i$  sera donné par:

$$\mu_i = \frac{Q_i}{2m_i} \sigma_i \quad (6.47)$$

où  $\sigma_i$  est le vecteur unitaire de spin si bien que la longueur de  $\mu_i$  est simplement

$$\mu_i = |\mu_i| = \frac{Q_i}{2m_i} \quad (6.48)$$

Le modèle des quarks prédit que le moment magnétique total d'un baryon sera donné

par la somme *vectorielle* (dans le sens de somme de moments angulaires) des moments magnétiques individuels des quarks.



### Exemple 6.6

Proton (état  $uud$ ):

Le proton est un état de spin  $\frac{1}{2}$ . Sa composante de spin up est donc

$$|p\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

dans la notation  $\left| \begin{array}{c} J \\ m \end{array} \right\rangle$ . Les quarks sont aussi des particules de spin  $\frac{1}{2}$  et donc on peut les retrouver dans les états up et down

$$|u\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \quad |d\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

La fonction d'onde du proton est obtenue en combinant deux quarks  $u$  correspondant à un état triplet symétrique de spin. Il s'écrit alors

$$\begin{aligned} |uu\rangle &= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\ &= a \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\rangle \oplus b \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \oplus c \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des coefficients de Clebsh-Gordan. Notons que la combinaison  $\left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\rangle$  est exclue ici puisqu'elle est issue du singulet antisymétrique sous l'échange des deux quarks  $u$ . Le proton est formé de la combinaison

$$|uu\rangle \otimes |d\rangle = \left( a \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\rangle \oplus b \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \oplus c \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \right) \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle.$$

On note que toutes ces combinaisons ne mènent pas à un proton de spin up. En effet, seules les combinaisons suivantes

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

donnent le spin recherché. Les tables de coefficients de Clebsh-Gordan nous permettent de connaître le mélange précis de ces deux combinaisons qui forment le proton avec un spin up:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.49)$$

Mais, on peut tirer aussi des informations similaire sur les états  $|uu\rangle$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les expressions précédentes, on obtient l'état en terme de ses composantes

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{6}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.50)$$

normalisé

$$\begin{aligned}
 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle &= \left( -\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &+ \left( -\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &+ \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le moment magnétique du proton terme de celui des quarks constituants

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{6} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &+ \frac{1}{6} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &+ \frac{2}{3} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{6} (-\mu_u + \mu_u + \mu_d) + \frac{1}{6} (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + \frac{2}{3} (\mu_u + \mu_u - \mu_d) \\
 &= \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d)
 \end{aligned}$$



### Exemple 6.7

Neutron (état  $udd$ ):

La fonction d'onde du neutron est simplement obtenue à partir de celle du proton en remplaçant les quarks  $u$  par des quarks  $d$ , et inversement. On a donc:

$$\begin{aligned}
 \mu_n &= \mu_p (u \leftrightarrow d) \\
 &= \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u)
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

De la même façon, il est possible d'obtenir les moments magnétique pour le  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$  etc...

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_p (d \rightarrow s) = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_s) \tag{6.52}$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_p (d \rightarrow s, u \rightarrow d) = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_s) \tag{6.53}$$



### Exemple 6.8

Particule  $\Lambda$  (état  $uds$ )

La particule  $\Lambda$  possédant un isospin nul, la paire de quarks  $ud$  est nécessairement dans un état antisymétrique d'isospin et de spin ( $I = J = 0$ ). Cela signifie que ces deux quarks ne contribuent pas au moment magnétique total de la particule  $\Lambda$  et que

$$\mu_\Lambda = \mu_s \tag{6.54}$$



En utilisant les résultats expérimentaux, on a donc que

$$\begin{aligned}\mu_p &= \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = 2.79\mu_N \\ \mu_n &= \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u = -1.91\mu_N \\ \mu_\Lambda &= \mu_s = -0.61\mu_N\end{aligned}$$

où

$$\mu_N = \text{magnéton nucléaire} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 1 \text{ nm.} \quad (6.55)$$

Inversant ces relations, on trouve

$$\begin{aligned}\mu_u &= \frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u} = 1.85\mu_N \\ \mu_d &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_d} = -0.97\mu_N \\ \mu_s &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s} = -0.61\mu_N.\end{aligned}$$

On obtient à partir de ces relations

$$\begin{aligned}m_u &= 0.36m_p = 340 \text{ MeV} \\ m_d &= 340 \text{ MeV} \\ m_s &= 510 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

Ces valeurs sont en bon accord avec celles obtenues dans la section précédente.

Étant donné la similitude entre leurs états de spin respectifs, il est facile de déduire les moments magnétiques des baryons les plus légers:

<b>Moments magnétiques des baryons <math>J^P = \frac{1}{2}^+</math></b>			
Baryons	Formule prédite	Valeur prédite ( $\mu_N$ )	Valeur observée ( $\mu_N$ )
$p$	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$	$\rightarrow$	$2.793 \pm$
$n$	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$	$-1.862$	$-1.913 \pm$
$\Lambda$	$\mu_s$	$\rightarrow$	$-0.613 \pm 0.005$
$\Sigma^+$	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$	$2.687$	$2.42 \pm 0.05$
$\Sigma^0$	$\frac{1}{3}(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)$	$0.785$	$*$
$\Sigma^-$	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s)$	$-1.037$	$-1.157 \pm 0.025$
$\Xi^0$	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u)$	$-1.438$	$-1.25 \pm 0.014$
$\Xi^-$	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$	$-0.507$	$-0.679 \pm 0.031$

Ce modèle élémentaire ne tient évidemment pas compte des effets collectifs que peuvent générer les quarks en formant des états liés. Cependant, malgré cette approximation grossière, on voit que le modèle prédit assez bien le moment magnétique des baryons légers.

## 6.6 Diagrammes de flot de quarks

Puisque les nombres de quarks de chaque saveur est conservé dans les interactions fortes, il est souvent pratique de visualiser les réactions hadroniques au niveau de leurs

constituants, les quarks. Alors, dans une telle réaction, si un nouveau quark apparaît dans une des particules produites, l'antiquark correspondant doit aussi faire son apparition. Les diagrammes de quarks illustrent graphiquement une réaction en tenant compte de la répartition des quarks dans les particules initiales, finales et même intermédiaires. Cette technique possède en plus quelques autres avantages. Il est facile d'identifier les produits intermédiaires par laquelle une réaction peut se produire simplement en tenant une comptabilité de quarks. De la même manière, la technique peut être servir à énumérer les produits de désintégration de particules ou même de résonances.

Considérons, par exemple, la réaction hadronique

$$\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+.$$

Au niveau des quarks, la réaction se lit

$$uuu \rightarrow uud + u\bar{d}$$

(voir figure 6.12). La production de la résonance  $\Delta^{++}$  peut passer par le processus

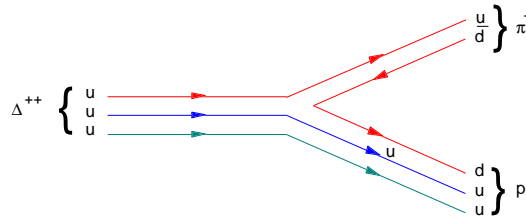


Figure 6.12 Diagramme de quarks pour le désintégration  $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ .

suivant:

$$p + \pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$$

Ce processus est permis comme on le voit à la figure 6.13. Par ailleurs, la figure 6.14 illustre la possibilité qu'une résonance  $X^{++}$  soit produite dans la réaction hadronique

$$p + K^+ \rightarrow X^{++} \rightarrow p + K^+.$$

Cette résonance qui serait formé de trois quarks  $u$ , un quark  $d$  et un antiquark  $\bar{s}$  n'a toutefois jamais été observée expérimentalement.

De plus, il existe une règle de sélection due à Okubo, Zweig et Iisuka — la règle OZI — qui stipule que la probabilité d'un processus qui implique une discontinuité dans les lignes de quarks est réduite (voir exemple figure 6.15).

## 6.7 Charme et $SU(4)$

L'introduction du quark charmé suggère que la symétrie d'isospin  $SU(2)$  d'abord étendue  $SU(3)$  pour décrire la spectroscopie des hadrons avec le quark étrange, pourrait s'élargir encore une fois jusqu'à  $SU(4)$  pour inclure le quatrième quark. Cependant, la

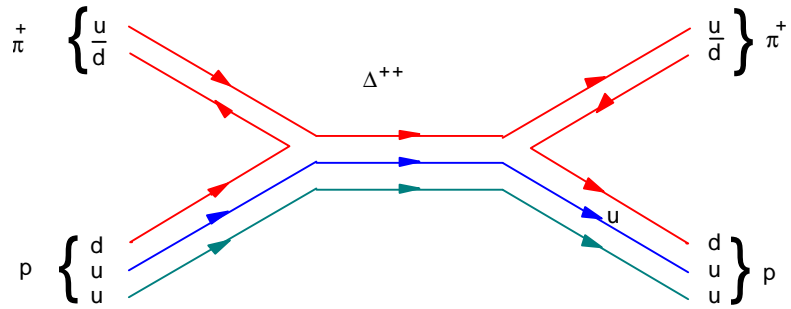


Figure 6.13 Production et désintégration d'une résonance  $\Delta^{++}$ .

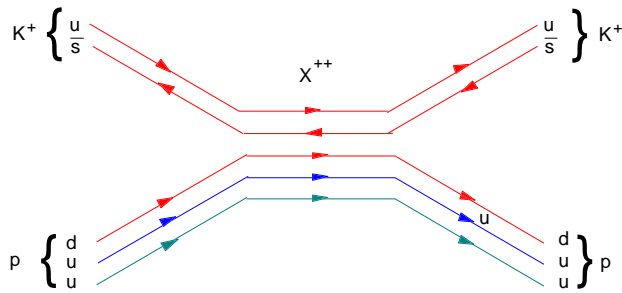


Figure 6.14 Diagramme pour la réaction  $p + K^+ \rightarrow X^{++} \rightarrow p + K^+$ .

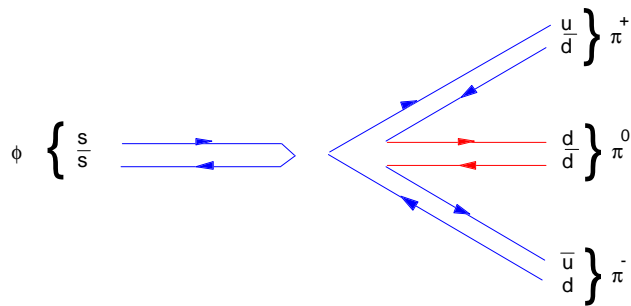


Figure 6.15 Exemple de processus rare selon la règle OZI.

symétrie  $SU(3)$ , on l'a déjà vu, est partiellement brisée avec pour conséquence la plus évidente une masse du quark étrange sensiblement plus élevée. Il est difficile alors de parler de symétrie  $SU(4)$  dans le cas des quarks  $u, d, s$  et  $c$  puisque avec 1.5 GeV pour la masse du quark charmé, on parle d'un ordre de grandeur face à la masse des autres quarks et d'un quark qui est même plus lourds que le proton.

Il reste que certains outils de la théorie des groupes peuvent être d'une grande utilité notamment pour la construction des différents états liés de quarks.

## Mésons

Les mésons sont construits par la combinaison de quarks et d'antiquarks (avec des spins anti-alignés pour les mésons scalaires et alignés pour les mésons vectoriels) dans les représentations fondamentale  $4$  et à son conjugué  $\bar{4}$  de  $SU(4)$ .

Par la méthode des tableaux de Young, on obtient les représentations irréductibles suivantes:

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.56)$$

soit

$$4 \otimes \bar{4} = 1_A \oplus 15_M \quad (6.57)$$

c'est-à-dire un singulet antisymétrique dans l'échange de saveurs et un 15-plet symétrique. Parmi les états formés, on retrouve les mésons de  $SU(3)$  et des nouveaux mésons charmés et non-charmés:

<b>Mésons charmés</b>			
Particule	$J^P$	$C$	Structure
$D^0, D_s^+, D^+$	$0^-$	$+1$	$c\bar{u}, c\bar{s}, c\bar{d}$
$D^-, D_s^-, D^0$	$0^-$	$-1$	$d\bar{c}, s\bar{c}, u\bar{c}$
$\eta_c$	$0^-$	$0$	$c\bar{c}$
$D^{*0}, D_s^{*+}, D^{*+}$	$1^-$	$+1$	$c\bar{u}, c\bar{s}, c\bar{d}$
$D^{*-}, D_s^{*-}, D^{*0}$	$1^-$	$-1$	$d\bar{c}, s\bar{c}, u\bar{c}$
$J/\psi$	$1^-$	$0$	$c\bar{c}$

Les particules correspondent alors à des positions sur les diagrammes de poids des représentations irréductibles  $15_M$  (voir figures 6.16-6.17). La position des singlets de mésons pseudo-scalaire et vectoriel  $\eta_c$  sur ces figures se situe côte-à-côte avec les états  $\pi^0$  et  $\rho^0$ .

## Baryons

Le système de 3 quarks, chacun provenant d'un quadruplet  $4$  de saveur de  $SU(4)$ , est construit par la combinaison

$$4 \otimes 4 \otimes 4.$$

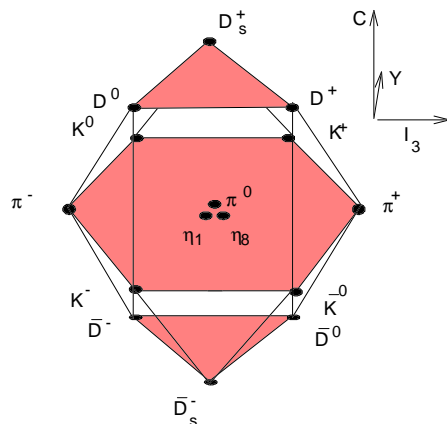


Figure 6.16 Multiplet de mésons  $J^P = 0^-$  formé d'un 15-plet de  $SU(4)$ . Le singulet 1 de  $SU(4)$  est l'état  $\eta_c$  qui se situe à la même position que les états  $\pi^0$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_8$ .

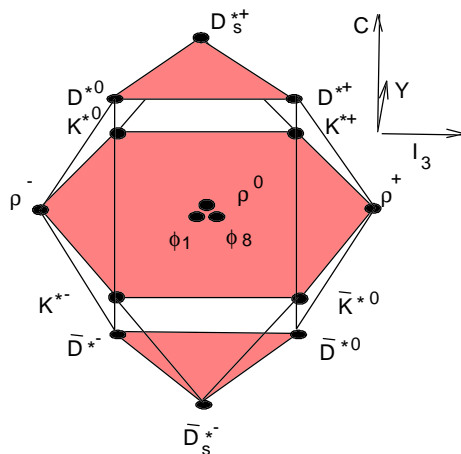


Figure 6.17 Multiplet de mésons  $J^P = 1^-$  formé d'un 15-plet de  $SU(4)$ . Le singulet 1 de  $SU(4)$  est l'état  $J/\psi$  qui se situe à la même position que les états  $\rho^0$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_8$ .

Par la méthode des tableaux de Young, on détermine les représentations irréductibles générées par ces combinaisons:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.58)$$

c'est-à-dire, un quadruplet et trois 20-plets:

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 4_A \oplus 20_M \oplus 20'_M \oplus 20_S \quad (6.59)$$

Parmi les états formés, on retrouve les baryons charmés de spin et parité  $J^P = \frac{1}{2}^+$ :

<b>Baryons charmés (<math>J^P = \frac{1}{2}^+</math>)</b>		
Particule	$C$	Structure
$\Sigma_c^0, \Sigma_c^+, \Sigma_c^{++},$	+1	$ddc, udc, uuc$
$\Xi_c^-, \Xi_c^0$	+1	$dsc, usc$
$\Omega_c^0$	+1	$ssc$
$\Lambda_c^+$	+1	$udc$
$\Xi_{cc}^+, \Xi_{cc}^{++}$	+2	$dcc, ucc$
$\Omega_{cc}^+$	+2	$scc$

et des baryons charmés de spin et parité  $J^P = \frac{3}{2}^+$  qu'on identifie par des symboles identiques pour alléger la nomenclature:

<b>Baryons charmés (<math>J^P = \frac{3}{2}^+</math>)</b>		
Particule	$C$	Structure
$\Sigma_c^0, \Sigma_c^+, \Sigma_c^{++},$	+1	$ddc, udc, uuc$
$\Xi_c^-, \Xi_c^0$	+1	$dsc, usc$
$\Omega_c^0$	+1	$ssc$
$\Xi_{cc}^+, \Xi_{cc}^{++}$	+2	$dcc, ucc$
$\Omega_{cc}^+$	+2	$scc$
$\Omega_{ccc}^{++}$	+3	$ccc$

Les baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  et  $J^P = \frac{3}{2}^+$  sont regroupés dans deux 20-plets différents (voir figures 6.18-6.19). On reconnaît aussi dans ces multiplets les baryons non-charmés de  $SU(3)$  dans les plans inférieurs des figures 6.18-6.19 qui correspondent à  $C = 0$ .

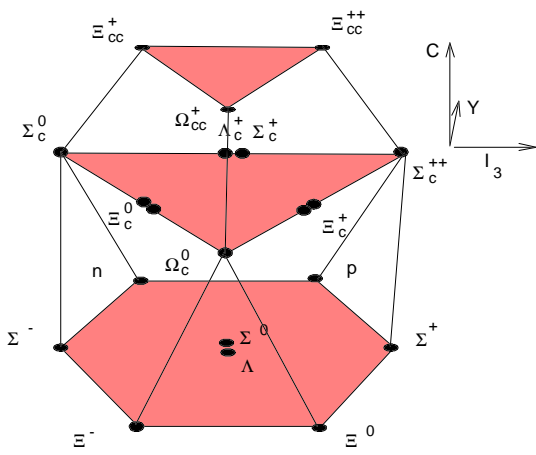


Figure 6.18 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  formé d'un **20**-plet de  $SU(4)$ .

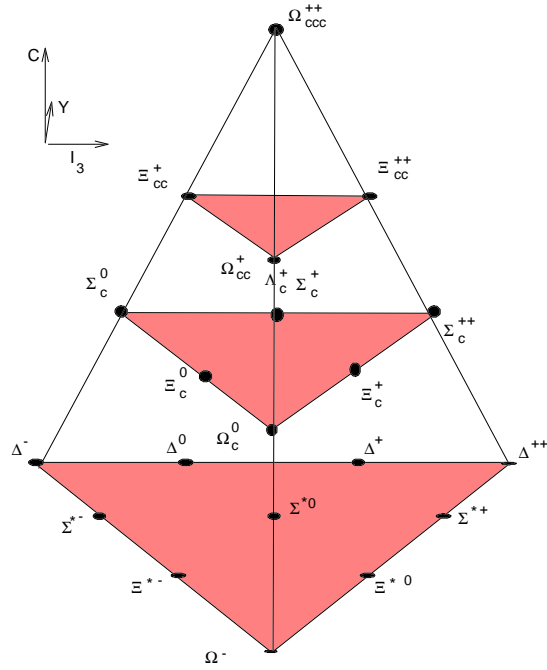


Figure 6.19 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  formé d'un **20**-plet de  $SU(4)$ .



## 6.8 Problèmes

### 1. Moment magnétique

Calculer le moment magnétique de  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$  et  $\Sigma^-$  en terme des moments magnétiques des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ .

### 2. Diagrammes de flot de quarks

Dessiner les diagrammes de flot de quarks, ou montrer que cela est impossible pour (voir exemples dans les notes de cours):

- $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + \bar{K}^0$
- $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$
- $\pi^- + n \rightarrow \Xi^- + K^0 + K^0$
- $K^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0$
- $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0$

### 3. Octet $J^P = 1^-$

Les particules  $K^{*\pm}$  (892 MeV),  $K^{*0}$  (896 MeV),  $\bar{K}^{*0}$  (896 MeV),  $\rho^{+,-,0}$  (768 MeV) et  $\omega$  (782 MeV) forment le multiplet  $J^P = 1^-$ . Représenter ces états sur un diagramme de poids  $I_3 - S$ .

### 4. Octet du nucléon

Quelles sont les principales raisons d'assigner les nucléons au multiplet  $J^P = \frac{1}{2}^-$ ?

### 5. Diagrammes de Feynman

Dessiner les diagrammes de Feynman pour la diffusion  $q\bar{q}$  aux deux ordres de perturbations les plus bas (contributions de Born et contributions à une boucle). Donner une interprétation physique de ces diagrammes.

### 6. Nombres quantiques

Écrire la relation entre la charge électrique  $Q$  d'une particule et ces autres nombres quantiques soient la troisième composante d'isospin  $I_3$ , le nombre baryonique  $B$ , l'étrangeté  $S$  et l'hypercharge  $Y$ ?

### 7. Les 4 interactions

Décrivez la grandeur de chaque type d'interaction en terme d'un couplage adimensionnel entre deux protons. Quelles sont les particules échangées dans chaque cas?

### 8. Hadrons

Décrivez les réactions hadroniques suivantes en détaillant leur contenu en quarks. Vérifier la conservation des nombres quantiques.

- $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$
- $p + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+ + n$

- (c)  $\Xi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \Lambda^0$   
 (d)  $K^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Omega^-$   
 (e)  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \bar{K}^0 + n$

9. **Multiplets de mésons**

Décrire l'interprétation que le modèle des quarks donne du méson  $\pi$  sachant qu'il s'agit d'un état  $J^P = 0^-$ , des autres mésons du même multiplet  $J^P = 0^-$  (construits à partir des quarks  $u$ ,  $d$ , et  $s$ ). Comment les mésons du multiplet  $J^P = 1^-$  sont construits?

10. **Méson  $\rho$  et  $K^0$**

Les modes de désintégration dominants des mésons  $\rho$  et  $K^0$  produisent une paire de  $\pi^+ \pi^-$ . Expliquer pourquoi les vies moyennes des  $\rho$  et  $K^0$  sont si différentes soient  $10^{-23}$  s et  $0.87 \times 10^{-10}$  s respectivement. Dessiner les diagrammes de Feynman correspondant à chaque modes de désintégration.

11. **Le  $J/\psi(3097)$**

L'état  $J/\psi(3097)$  a une largeur de désintégration de 88 keV. Expliquer pourquoi cette particule ne peut pas être constituée uniquement de quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  mais doit avoir un contenu de quark  $c$ . Expliquer pourquoi la largeur de désintégration est si petite et dessiner le diagramme de Feynman d'un mode de désintégration dominant.

L'état excité  $\psi(3770)$  a une largeur de désintégration de 23.6 MeV. Décrire un mode de désintégration dominant.

12. **Le quark bottom**

Les interactions faibles permettent des interaction mettant en jeu les quarks  $b$  et  $c$  et les quarks  $c$  et  $s$ . Dessiner les diagrammes de Feynman qui illustrent les modes de désintégration hadronique des particules suivantes

- (a)  $\Lambda_c^+$   
 (b)  $D^+$   
 (c)  $B^+$   
 (d)  $\bar{B}_s^0$   
 (e)  $\Lambda_b^0$

13. **Méson  $D^0$**

Dessiner les diagrammes de Feynman pour les modes de désintégration du méson  $D^0$  suivants.

- (a)  $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+$   
 (b)  $D^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+$   
 (c)  $D^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$

Estimer les amplitudes de désintégration relatives.

14. **Méson  $\rho$**

Le méson  $\rho$  possède les nombres quantiques suivants  $S = 0$ ,  $J^P = 1^-$  avec une masse de 770 MeV. Proposer un mode de production du  $\rho^0$ , et comment sa vie moyenne peut être ob-

tenu à partir de mesures.





# 7 INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Nous abordons un aspect crucial de la physique des particules élémentaires, c'est-à-dire les interactions. Il existe quatre forces fondamentales: les forces électromagnétique, faible, forte et gravitationnelle. La quatrième des ces forces est mal comprise du point de vue quantique et possède un couplage tout à fait négligeable à l'échelle des particules élémentaires; elle sera abordée sommairement dans les derniers chapitres de cet ouvrage.

Notre étude des interactions fondamentales débute avec la plus connue, la force électromagnétique. Cette dernière est responsable de la cohésion des atomes et des molécules. Les niveaux d'énergie de systèmes simples tels que l'atome d'hydrogène, le positronium ou le muonium sont calculés à l'aide de relations de la forme

$$E = -\frac{\text{const}}{n^2},$$

où  $n$  est un entier positif discret caractérisant le niveau d'excitation du système. On associe le mécanisme de liaison d'un tel système à un potentiel Coulombien. L'allure de la relation énergétique est directement attribuable à la forme du potentiel (qui varie dans ce cas en  $\frac{1}{r}$ ), aux constantes de couplage, aux masses, etc. Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement aux états non-liés qui résultent de la diffusion élastique d'un électron par un noyau tel que le proton. Nous serons à même de constater que la physique des problèmes de diffusion est encore une fois déterminée par la forme du potentiel d'interaction, les constantes de couplage, les masses, etc.

## 7.1 Diffusion (non-polarisée) $e$ –Noyau

Considérons tout d'abord le cas simple de la diffusion de Rutherford d'un électron sans spin par un noyau. Rappelons que pour un système quantique, la probabilité de transition par unité de temps d'un état initial  $i$  vers un état final  $f$ , est

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho_f(E_f) \\ &= 2\pi |M_{fi}|^2 \rho_f(E_f),\end{aligned}$$

où  $\rho_f$  est la densité finale d'états ( $\frac{dN}{dE_f}$ ) et  $M_{fi}$  une quantité qui contient toute l'information à propos de la dynamique de l'interaction (constantes de couplage, dépendance énergétique, distribution angulaire, ...). Au premier ordre de la théorie des perturbations,

c'est-à-dire lorsque la perturbation est faible ( $V \ll H$ ),  $M_{fi}$  peut être interprétée comme une intégrale de recouvrement sur tout l'espace,

$$M_{fi} = \int \psi_f^* V(\mathbf{r}) \psi_i d^3\mathbf{r}, \quad (7.1)$$

où  $\psi_i$  et  $\psi_f$  sont les fonctions d'onde de l'électron avant et après la diffusion et  $V(r)$  le potentiel d'interaction. Si l'approximation d'interaction *faible* n'est pas respectée, alors  $M_{fi}$  ne peut pas être calculée explicitement. De façon générale, la quantité  $M_{fi}$  est reliée à  $S$ , la matrice de diffusion (voir éq.(3.28)). C'est par l'évaluation souvent difficile de cette matrice que l'on est en mesure d'obtenir des résultats concernant les processus d'interaction d'une théorie.

L'approximation de Born implique non seulement que  $V \ll H$  mais aussi que l'on ne considère qu'une diffusion simple, c'est-à-dire un processus n'impliquant qu'un électron et un noyau. On écrit  $\psi_i$  et  $\psi_f$  sous forme d'onde plane ( $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ ) de sorte que

$$M_{fi} = \int e^{i(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p})\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (7.2)$$

où  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}$  sont respectivement les vecteurs d'onde des particules initiale et finale. La section efficace d'un processus est

$$\sigma = 2\pi \frac{|M_{if}|^2}{v} \rho_f, \quad (7.3)$$

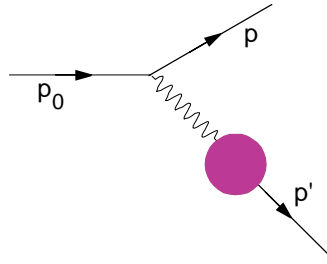
où  $v$  est la vitesse de l'électron par rapport au centre de diffusion. La densité d'état en fonction de  $p$  (la norme de l'impulsion de l'électron après diffusion) est

$$\rho_f = \frac{p^2 d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{dp}{dE_f}, \quad (7.4)$$

où  $E_f$  est l'énergie totale après interaction. Finalement, on déduit que la section efficace différentielle est

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{v} \frac{dp}{dE_f} |M_{if}|^2. \quad (7.5)$$

Dans le but d'obtenir un résultat qui soit le plus général possible, considérons que le recul du noyau (suite à son interaction avec l'électron) est non-négligeable. Les quantités  $\mathbf{p}'$ ,  $W$  et  $M$  sont respectivement utilisées pour représenter l'impulsion, l'énergie totale et la masse au repos du noyau après la réaction telles que mesurées dans le système du laboratoire. L'angle de diffusion de l'électron est noté  $\theta$ .

Figure 7.1 Dynamique de la collision  $e - N$ .

En appliquant les relations fondamentales de conservation d'énergie et d'impulsion pour les électrons qui sont dans un régime ultra-relativiste (leur masse est négligeable par rapport à leur énergie cinétique), on peut écrire

$$\begin{aligned} E_i &\simeq p_0 + M \\ E_f &\simeq p + W \\ \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p} + \mathbf{p}' \end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} E_f &= p + \sqrt{p'^2 + M^2} \\ &= p + \sqrt{p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos \theta + M^2} \end{aligned}$$

d'où, avec quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\left(\frac{\partial p}{\partial E_f}\right)_\theta = \frac{W}{E_f - p_0 \cos \theta} = \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} \quad (7.6)$$

et

$$\frac{p}{p_0} = \frac{M}{M + p_0(1 - \cos(\theta))}. \quad (7.7)$$

L'expression de la section efficace différentielle devient alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2} p^2 \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} \left| \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right|^2, \quad (7.8)$$

où  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}$  est la quantité d'impulsion transférée au noyau par l'électron lors du processus de diffusion.

Considérons que le noyau possède une densité de charge,  $\rho_c(\mathbf{R})$ , normalisée telle que

$$\int_0^\infty \rho_c(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R} = 1. \quad (7.9)$$

Le potentiel d'interaction prend alors la forme

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Ze^2}{4\pi} \int \frac{\rho_c(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (7.10)$$

et l'élément de matrice  $M_{fi}$  devient

$$M_{fi} = \frac{Ze^2}{4\pi} \iint \rho_c(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d^3\mathbf{R} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3\mathbf{r}. \quad (7.11)$$

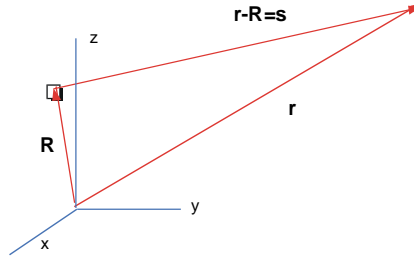


Figure 7.2 Distribution de charge.

Cette équation est encore relativement compliquée.

Pour la simplifier, utilisons les variables  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$  et  $\alpha$  (voir figure 7.2). La norme de la première représente la distance séparant l'électron d'un point situé à la position  $\mathbf{R}$  à l'intérieur du noyau et la deuxième est l'angle polaire entre les vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{q}$ . Ce changement de variables permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 M_{fi} &= \frac{Ze^2}{4\pi} F(\mathbf{q}^2) \int \frac{e^{iqs \cos \alpha}}{s} s^2 ds d(\cos \alpha) d\phi \\
 &= \frac{Ze^2}{2} F(\mathbf{q}^2) \int s ds \int e^{iqs \cos \alpha} d(\cos \alpha) \\
 &= \frac{Ze^2}{2} F(\mathbf{q}^2) \int \frac{s ds (e^{iqs} - e^{-iqs})}{iqs}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

où  $F(\mathbf{q}^2)$  est une fonction de structure nucléaire ou un facteur de forme défini comme

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d^3\mathbf{R}. \tag{7.13}$$

Il est bien connu que l'énergie d'une particule dans un potentiel Coulombien est infinie. Il s'agit en fait d'un problème inhérent aux théories classiques décrivant les particules comme étant des entités ponctuelles. Il n'est donc pas surprenant que l'expression trouvée pour  $M_{fi}$  diverge et ce, à cause de la région où les impulsions transférées au noyau sont faibles. Il faut donc trouver un moyen pour faire converger le plus naturellement possible cette expression. Loin du noyau, il y a un effet d'écran qui se manifeste à cause des électrons atomiques. Par conséquent, un électron diffusé loin du noyau, possédant par le fait même une faible impulsion, ne verra pas la charge totale de ce dernier. Il est possible de décrire cet effet d'écran en utilisant un potentiel modifié,

$$V(\mathbf{r}) \rightarrow e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{a}} V(\mathbf{r}), \tag{7.14}$$

où  $a$  est une constante dont la grandeur est typique d'un rayon atomique. Puisque  $a \ll R$  par un facteur d'environ  $10^4$ , on peut poser que  $e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{a}} = e^{-\frac{|\mathbf{s}|}{a}}$ . L'expression divergente prend alors la forme

$$M_{fi} = \frac{(Ze^2)F(\mathbf{q}^2)}{iq} \left[ \int e^{-s(\frac{1}{a} - iq)} ds - \int e^{-s(\frac{1}{a} + iq)} ds \right]$$



$$= \left(\frac{Ze^2}{2}\right) \frac{F(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

On obtient donc une expression qui, pour de faibles impulsions transférées, tend vers une valeur constante. Il en est de même pour la section efficace puisque  $|M_{fi}|^2 \propto \frac{d\sigma}{d\Omega}$ . Cependant,  $a \sim 10^{-8}$  cm et  $\frac{1}{a} \sim 1$  keV, alors, pour le régime d'énergie ( $\sim 1$  GeV), on néglige ce facteur et la section efficace différentielle est

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2}{\mathbf{q}^4} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 p^4 \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} F^2(\mathbf{q}^2). \quad (7.15)$$

Si la dynamique du centre de diffusion est non relativiste, on peut poser  $\frac{W}{M} = 1$ . En utilisant aussi les approximations  $p = p_0$  (car  $p' = q \ll p_0$ ) et

$$\mathbf{q}^2 = 2p_0^2(1 - \cos\theta) = 4p_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad (7.16)$$

on obtient une expression simplifiée pour la section efficace différentielle:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 \alpha_{em}^2 \frac{F^2(\mathbf{q}^2)}{4p_0^2 \sin^4 \frac{1}{2}\theta}, \quad (7.17)$$

où  $\alpha_{em}^2 = \frac{e^2}{4\pi}$  est la constante de structure fine, .L'angle solide pour le processus de diffusion considéré est

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta) = \frac{2\pi d\mathbf{q}^2}{2p_0^2}, \quad (7.18)$$

ce qui permet d'exprimer la section efficace sous la forme

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 Z^2 F^2(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^4}. \quad (7.19)$$

Lorsque l'impulsion échangée est faible, la fonction de structure tend vers l'unité,

$$\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow 0} F(\mathbf{q}^2) = 1.$$

Il est intéressant de noter qu'on retrouve alors la formule de diffusion de Rutherford pour une particule ponctuelle.

Jusqu'à maintenant, le repère du laboratoire a été utilisé, ce dernier étant bien adapté au problème traité. Cependant, il est pratique d'adopter la notation covariante qui permet de rendre des expressions telles que la section efficace différentielle invariante d'un système de référence à l'autre (système du laboratoire, système du centre de masse, ...). Cette opération est effectuée en redéfinissant le vecteur spatial  $\mathbf{q}$  à trois composantes en un quadri-vecteur impulsion  $q^\mu$ . Les vecteurs du problème deviennent  $p_0^\mu = (E_0, \mathbf{p}_0)$ ,  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  et  $p'^\mu = (W, \mathbf{p}')$ . En utilisant cette notation, le quadri-vecteur  $q^\mu$  au carré s'exprime sous la forme

$$q^2 = q^\mu q_\mu = (p_0 - p)^2 \quad (7.20)$$

$$= 2m^2 - 2EE_0 + 2pp_0 \cos\theta \quad (7.21)$$

et en négligeant la masse de l'électron ( $m^2 \ll q^2$ ), on obtient

$$q^2 = -4pp_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (7.22)$$

Pour une diffusion, l'angle  $\theta$  est réel et  $q^2 < 0$ . Il faut noter que lors de l'échange d'une particule réelle, la quantité  $q^2$  est positive (du même signe que la composante énergie).

Lorsque  $q^2 < 0$ , l'impulsion est de *genre-temps* alors que pour  $q^2 > 0$ , elle est de *genre-espace*. Tous les processus de diffusion se produisent dans une région où  $q^2$  est de *genre-temps*.

L'impulsion échangée peut aussi être écrite:

$$\begin{aligned} q^2 &= (M - W)^2 - \mathbf{p}'^2 \\ &= -2MW + 2M^2 = -2MK, \end{aligned}$$

où  $K$  est l'énergie cinétique transmise au noyau. Par conséquent,

$$\frac{W}{M} = 1 - \frac{q^2}{2M^2}. \quad (7.23)$$

Donc, si l'énergie transférée au noyau est négligeable ( $q^2 \ll 2M^2$ ), il est possible d'utiliser l'approximation suivante  $\frac{W}{M} \simeq 1$ .

Avec la notation quadri-vectorielle, l'expression de  $|M_{fi}|^2$  demeure la même à l'exception de la substitution de  $\mathbf{q}$  par  $q^\mu$ . L'intégrale dans la fonction de structure  $F(-q^2)$  est maintenant sur l'espace et le temps ( $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} \rightarrow q_\mu R^\mu$ ). Lorsque  $\frac{W}{M} \simeq 1$ ,

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} d^3 \mathbf{R}. \rightarrow F(-q^2) = \int \rho(x) e^{-iq \cdot x} d^4 x \quad (7.24)$$

puisque

$$\begin{aligned} q^2 &\simeq -\mathbf{q}^2 \\ q \cdot x &= (E_0 - E, \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}) \cdot (R^0, \mathbf{R}) \\ &\simeq (0, \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}) \cdot (R^0, \mathbf{R}) = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}. \end{aligned}$$

L'intégrale demeure donc essentiellement la transformée de Fourier de la distribution spatiale de la charge.

## 7.2 Processus avec spin

### Notions de spin

Posons deux particules ont des moments angulaires  $\mathbf{j}_1$  et  $\mathbf{j}_2$  avec des composantes respectives selon l'axe des  $z$ ,  $m_1$  et  $m_2$ . La composante totale selon l'axe des  $z$  est

$$m = m_1 + m_2, \quad (7.25)$$

et le moment angulaire totale est

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2, \quad (7.26)$$

dont la valeur se situe dans l'intervalle

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2|. \quad (7.27)$$

Soit un état  $|j, m\rangle$  auquel on fait subir une rotation autour de l'axe des  $y$ . L'état résultant est une combinaison linéaire des  $(2j + 1)$  états  $|j, m'\rangle$  avec  $m' = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ . L'application de l'opérateur de rotation sur l'état initial donne une expression de la

forme

$$e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m',m}^j(\theta) |j, m'\rangle, \quad (7.28)$$

où les  $d_{m',m}^j$  sont les éléments de la matrice de rotation. Il s'agit d'une représentation particulière du groupe de rotation

$$d_{m',m}^j = \langle j, m' | \phi^*(j, m') e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle. \quad (7.29)$$

Pour un état de moment angulaire  $j = \frac{1}{2}$ , il est possible de démontrer que

$$d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2}$$

Dans un système de référence où l'électron est relativiste, le vecteur de spin  $\sigma$  est aligné selon la direction de propagation, c'est-à-dire selon le vecteur  $\mathbf{p}$ . Il faut se rappeler que les  $\sigma_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) sont les matrices de Pauli. Si  $\mathbf{p}$  représente la direction  $z$ , alors les valeurs moyennes du vecteur de spin selon les trois directions sont:  $\langle \sigma_z \rangle = \pm 1$  et  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$ . La polarisation longitudinale est une quantité appelée hélicité définie par

$$H = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \pm 1. \quad (7.30)$$

Les particules avec  $H = +1$  sont dites d'hélicité droite et celle avec  $H = -1$  sont d'hélicité gauche. On les note respectivement par  $\psi_R$  et  $\psi_L$ .

## Diffusion polarisée $e$ –Noyau

Considérons un faisceau de particules polarisées d'hélicité droite se propageant selon l'axe des  $z$ . Chaque particule est décrite par la fonction  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  qui est diffusée à un angle  $\theta$ . Si le processus considéré conserve l'hélicité, la particule finale aura une hélicité droite par rapport au vecteur impulsion. Cependant, relativement à l'axe des  $z$ , le faisceau résultant est une superposition des états  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle'$  et  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle'$ .

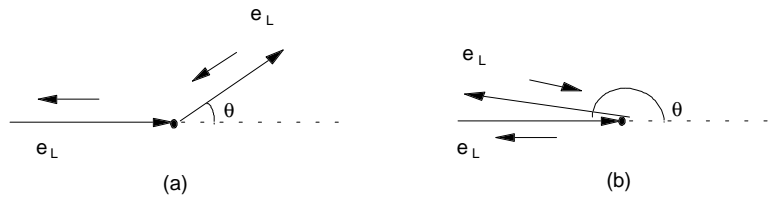


Figure 7.3 L'hélicité est préservée dans la diffusion d'une particule polarisée par une autre particule chargée. Une particule d'hélicité gauche (ou droite) ne peut être diffusée à un angle  $\theta = \pi$ . (b). Pour un angle  $\theta$  arbitraire, la particule finale est décrite par une superposition des deux états d'hélicité (a).

La conservation du moment angulaire dans une interaction qui ne renverse pas les

spins ne permet que l'état final  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle'$  avec la distribution angulaire (voir figure 7.3)

$$|d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta)|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Pour une interaction qui renverse les spins, l'état final est  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle'$  avec la distribution

$$|d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta)|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Dans le cas des interactions électromagnétiques, l'hélicité est une quantité conservée. La partie Coulombienne de l'interaction ne change pas l'orientation du spin de la particule. Par conséquent, une diffusion à un angle de  $\pi$  n'est pas permise.

Un électron d'hélicité gauche diffusé à un angle  $\theta$  est décrit par une fonction  $\psi_L(\theta)$  qui est une superposition linéaire des amplitudes pour les états  $m = \frac{1}{2}$  et  $m = -\frac{1}{2}$ . La fraction de l'amplitude correspondant à un électron originalement dans un état  $m = -\frac{1}{2}$  et émergeant avec  $m = -\frac{1}{2}$  est  $d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ . Par conséquent, l'effet du spin de l'électron sur la diffusion par un noyau sans spin est l'introduction d'un facteur  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  dans la section efficace. Il en découle la formule de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2 \alpha_{em}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4p_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left[1 + \frac{2p_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]}. \quad (7.31)$$

## 7.3 Diffusion $e - N$

Tenons compte maintenant des effets du spin du noyau lors de la diffusion électron-proton. On suppose que le proton est une particule ponctuelle (une particule de Dirac). En plus d'une interaction électrique, il y a alors une interaction magnétique entre l'électron et le centre de diffusion. L'interaction coulombienne ne permet pas au spin de l'électron d'être renversé alors que l'interaction magnétique renverse le spin. Le champ magnétique du proton varie en  $\frac{1}{r^3}$  alors que son champ électrique varie en  $\frac{1}{r^2}$ . Par conséquent, des collisions avec  $q^2$  élevé (faible valeur de  $r$ ) impliquent que l'interaction magnétique soit dominante. La section efficace prend la forme

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad (7.32)$$

où

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{\alpha_{em}^2}{(4p_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}) \left[1 + \frac{2p_0}{M} \sin^2 \theta\right]}. \quad (7.33)$$

Cette équation serait valide si les deux particules impliquées étaient ponctuelles avec des moments magnétiques  $\mu = \frac{e\hbar}{2mc} = \frac{e}{2m}$  ( $1 \mu_N$  pour le proton et  $0 \mu_N$  pour le neutron). Cependant, il n'en est rien puisque le proton et le neutron ne sont pas ponctuelles et leurs moments magnétiques sont dits anormaux en ce sens qu'ils diffèrent des valeurs calculées pour des entités ponctuelles ( $2.79 \mu_N$  pour le proton et  $-1.91 \mu_N$  pour le neutron).

La structure du nucléon (proton et neutron) est décrite par un facteur de forme électrique ( $G_E(q^2)$ ) et un facteur de forme magnétique ( $G_M(q^2)$ ). En fonction de ces nou-

velles quantités, la section efficace différentielle devient

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[ \frac{G_E^2 + \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{q^2}{4M^2}} + \frac{q^2}{4M^2} \cdot 2G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (7.34)$$

où les fonction  $G_E^2 = G_E^2(q^2)$  et  $G_M^2 = G_M^2(q^2)$  sont normalisées de sorte que  $G_E^P(0) = 1$ ,  $G_E^N(0) = 0$ ,  $G_M^P(0) = 2.79$  et  $G_M^N(0) = -1.91$ . Cette nouvelle relation est connue sous le nom de la formule de Rosenbluth. Elle adopte la forme

$$\mathcal{F} = \frac{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)}{\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}} = A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}.$$

Par conséquent, pour  $q^2$  fixe, la courbe de  $\mathcal{F}(x, q^2)$  en fonction de  $x = \tan^2 \frac{\theta}{2}$  est une droite (voir figure 7.4).

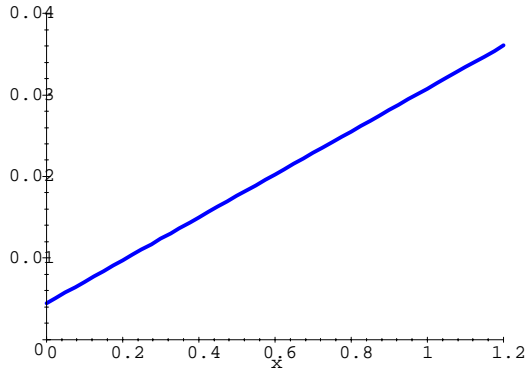


Figure 7.4 Le rapport  $\mathcal{F}(x, q^2)$  en fonction de  $x = \tan^2 \frac{\theta}{2}$  pour un  $q^2$  fixe.

Les facteurs de forme élastiques permettent de caractériser la distribution spatiale de la charge électrique et du moment magnétique dans le nucléon. Une théorie complète de la structure hadronique pourrait, en principe, permettre de calculer de telles quantités. Cependant, les théories actuelles (le modèle des quarks et la chromodynamique quantique) ne permettent l'extraction que de peu d'informations concernant la structure des hadrons à cause de la très grande complexité des calculs théoriques et/ou numériques impliqués.

## 7.4 Processus purement leptoniques en QED

Considérons maintenant d'un point de vue plutôt qualitatif deux processus n'impliquant que des leptons, c'est-à-dire  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  et  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ . Pour obtenir les expressions pour des quantités physiques telles que la section efficace, il est nécessaire d'utiliser la théorie des perturbations. Alors, l'amplitude de probabilité relative à un processus correspond à la somme de tous les diagrammes de Feynman possibles. En QED,

ces diagrammes peuvent contenir l'échange de plusieurs photons et l'apparition de paires  $e^+e^-$ . L'importance d'un diagramme dans la série perturbative est directement reliée au nombre de photons qu'il contient. Par exemple, l'échange d'un seul photon contribue en  $\alpha_{em}$ , l'échange de deux photons en  $\alpha_{em}^2$ , etc...

## Processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

En ne considérant que le diagramme associé à l'échange d'un photon (voir figure 7.5), la section efficace de ce processus électromagnétique à l'ordre  $\mathcal{O}(\alpha_{em})$  est

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}, \quad (7.35)$$

La variable de Mandelstam  $s$  est le carré de l'énergie dans le centre de masse ( $s = 4E_1^{CM}E_2^{CM}$ , avec  $E_1^{CM}$  et  $E_2^{CM}$  les énergies de l'électron et du positron entrant en collision). Les masses des leptons ont été négligées puisque très petites en comparaison de l'énergie totale dans le centre de masse ( $s \ll m_e^2, m_\mu^2$ ). La distribution angulaire de ce processus a la forme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \theta). \quad (7.36)$$

où  $\theta$  désigne l'angle d'émission des muons par rapport au faisceau incident dans le repère du centre de masse. Dans ce type de processus impliquant des fermions relativistes, l'hélicité est conservée.

Considérons le processus  $e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+$ . Puisque l'hélicité est conservée, on a  $e_R^- \rightarrow e_R^-, e_L^- \rightarrow e_L^-$  et la même chose pour les muons. Le diagramme relatif à ce processus est relié à celui de  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  en remplaçant une particule initiale (finale) par une antiparticule finale (initiale) qui va par conséquent posséder une hélicité différente. Il s'en suit que  $e_L^-$  et  $e_R^+$  (ou  $e_R^-$  et  $e_L^+$ ) et non  $e_L^+$  et  $e_L^-$  (ou  $e_R^+$  et  $e_R^-$ ) sont couplés. Il existe donc deux diagrammes qui contribuent au processus avec la même probabilité (voir figure 7.5).

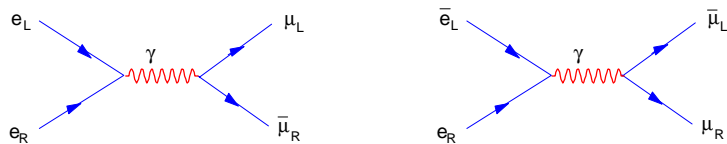


Figure 7.5 Diagrammes de Feynman contribuant au processus  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Les valeurs expérimentales de la section efficace totale pour le processus  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  sont en bon accord avec les prédictions de QED. Cependant, la section efficace différentielle expérimentale est quelque peu décalée par rapport aux prédictions de QED

(voir figure 7.6). La raison est qu'il faut tenir compte non seulement du diagramme pour lequel il y a échange d'un photon mais aussi de celui où il y a échange d'un boson d'interaction faible, le  $Z^0$ . Puisque l'amplitude faible est de l'ordre de  $G_F$  (la constante de Fermi), l'interférence  $\gamma - Z^0$  est de l'ordre  $f \sim \frac{G_F s}{4\pi\alpha_{em}} \sim 10^{-4}s$  où  $s$  est en  $\text{GeV}^2$ . Par exemple, pour  $s = 1000 \text{ GeV}^2$ , on obtient  $f \simeq 10\%$ . Une telle asymétrie est un bon test de la validité du modèle électrofaible.

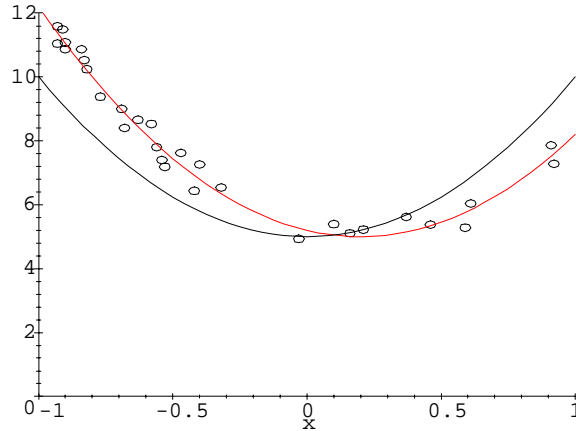


Figure 7.6 Comparaison des prédictions théoriques de QED (en noir), QED + interactions faibles (en rouge) aux valeurs expérimentales de la section efficace totale pour le processus  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  en fonction de  $x = \cos^2 \theta$ .

## Diffusion de Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$

La section efficace de la diffusion Bhabha varie en  $\frac{1}{s}$  mais sa dépendance angulaire est complexe. En effet, pour ce processus deux diagrammes contribuent (voir figure 7.7), ce qui rend le traitement en terme de diagrammes de Feynman plus compliqué. Pour de faibles angles, le premier diagramme domine. La section efficace différentielle est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

## 7.5 Corrections radiatives

Pour les processus considérés jusqu'à présent, il existe un nombre infini de diagrammes qui contribuent. Cependant, la majorité d'entre eux sont négligeables puisque leur expression analytique est proportionnelle à des puissances élevées de  $\alpha_{em} \simeq \frac{1}{137}$ . C'est pour cette raison que les prédictions basées sur l'échange d'un seul photon (approximation de Born) sont acceptables. Les corrections introduites par les diagrammes

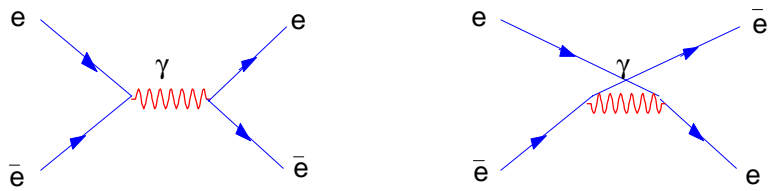


Figure 7.7 Diagrammes de Feynman contribuant à la diffusion Bhabha, i.e.  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ .



supplémentaires sont très difficiles à mesurer expérimentalement puisque que très petites.

Les contributions d'ordre supérieur peuvent être calculées dans le cadre de l'électrodynamique quantique (QED). Ces résultats peuvent alors être vérifiés à l'aide d'expériences très précises pouvant être divisées en deux classes: celles concernant les moments magnétiques leptoniques et celles concernant les niveaux d'énergie d'états liés.

## Moments magnétiques leptoniques

Pour un lepton (spin  $\frac{1}{2}$ ) ponctuel, le moment magnétique est égal au magnéton de Bohr,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad (7.37)$$

où  $m$  est la masse du lepton. De façon générale, on définit le moment magnétique avec la relation

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_B \mathbf{s}, \quad (7.38)$$

où  $g$  est le facteur de Landé,  $s$  le spin et  $g\mu_B = \frac{\mu}{s}$ , le rapport gyromagnétique. L'équation de Dirac prédit que  $g = 2$  pour une particule ponctuelle. Cependant, la valeur de  $g$  diffère de 0.2 % de la valeur attendue. Comme l'indique ce résultat, il n'est pas tout à fait correct de considérer un lepton comme une particule ponctuelle sans structure. Le moment magnétique d'une particule chargée est fonction du quotient  $\frac{e}{m}$ . (Rappelons que classiquement, pour une structure en rotation, on trouve  $g = 1$  alors que dans le cas d'une particule de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $g = 2$ ).

À cause du principe d'incertitude de Heisenberg, un électron peut être considéré comme étant composé d'un électron "nu" (particule ponctuelle) entouré d'un nuage de photons virtuels continûment émis et réabsorbés. Qualitativement, on peut dire qu'une partie de la masse de l'électron est attribuable à l'énergie que possède le nuage de photons et de paires particules-antiparticules virtuelles. Par conséquent,  $\frac{e}{m}$  prend une valeur légèrement supérieure. En effectuant une mesure du moment magnétique par l'application d'un champ  $B$ , c'est cette masse corrigée qui sera perçue. La correction est proportionnelle à la probabilité d'émission d'un photon. Les corrections proportionnelles à  $\alpha_{em}$ ,  $\alpha_{em}^2$ , ... sont respectivement associées à l'émission de 1, 2, ... photons virtuels au moment où le champ est appliqué.

La figure 7.8 présente une liste partielle de diagrammes de processus virtuels. Le premier diagramme correspond à l'interaction d'un électron "nu", le deuxième à l'émission d'un photon virtuel ( $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ ) et le troisième à l'émission de deux photons virtuels ( $\mathcal{O}(\alpha_{em}^2)$ ). Le dernier diagramme ( $\mathcal{O}(\alpha_{em}^2)$ ) contient l'émission d'une paire virtuelle  $e^+e^-$ . Il contribue à ce qu'on appelle la *polarisation du vide*. La paire  $e^+e^-$  va être polarisée ce qui va créer un effet d'écran atténuant la charge de l'électron "nu".

Les prédictions de l'électrodynamique quantique concernant la valeur des moments magnétiques de l'électron et du muon sont:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g-2}{2}\right)_e^{\text{QED}} &= 0.5\frac{\alpha_{em}}{\pi} - 0.328478966\left(\frac{\alpha_{em}}{\pi}\right)^2 + 1.1765\left(\frac{\alpha_{em}}{\pi}\right)^3 - 0.8\left(\frac{\alpha_{em}}{\pi}\right)^4 + \dots \\ &= (1\,159\,652.307 \pm 0.110) \times 10^{-9}, \end{aligned}$$

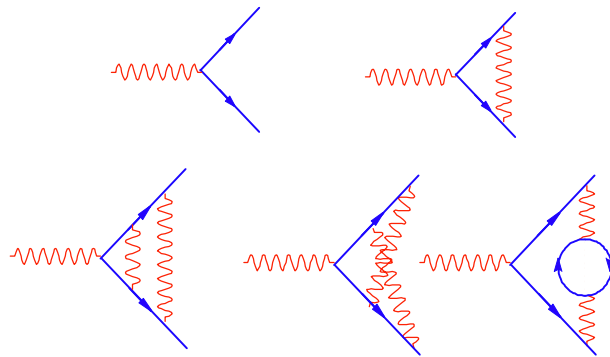


Figure 7.8 Quelques exemples de diagrammes de Feynman montrant des processus virtuels possibles.

$$\begin{aligned} \left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu}^{\text{QED}} &= 0.5\frac{\alpha_{em}}{\pi} + 0.76578\left(\frac{\alpha_{em}}{\pi}\right)^2 + 24.45\left(\frac{\alpha_{em}}{\pi}\right)^3 + \dots \\ &= (1\,165\,851.7 \pm 2.3) \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Expérimentalement, on obtient les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g-2}{2}\right)_e &= (1\,159\,652.193 \pm 0.110) \times 10^{-9}, \\ \left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu} &= (1\,165\,924 \pm 9) \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

À noter que la prédictions théorique de QED du rapport gyromagnétique du muon ne semble pas en accord avec les résultats expérimentaux. En fait, pour le muon les effets des interactions fortes ne sont plus négligeables et doivent être inclus. On obtient alors

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_{\mu}^{\text{QED+QCD}} = (1\,165\,918 \pm 10) \times 10^{-9}.$$

## Structure hyperfine

Un autre exemple permettant de constater le pouvoir prédictif de QED est l'étude de la transition  $1^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$  dans le muonium et le positronium. Dans ce cas, la différence entre les valeurs théoriques et expérimentales (tableau ci-dessous) sont attribuées à des corrections d'ordres supérieurs.

	$\mu^+e^-$	$e^+e^-$	$e^-p$ (hydrogène)
Théorie	4463.304 ( $\pm 6$ ) MHz	203400 ( $\pm 10$ ) MHz	
Expérience	4463.302 ( $\pm 5$ ) MHz	203387 ( $\pm 2$ ) MHz	1420.4057 MHz

Rappelons les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont fonction du nombre quantique principal  $n$  et du moment angulaire total de l'électron,  $j$ . En QED, il existe aussi une dépendance en  $l$ , le moment angulaire orbital. Il s'en suit que les niveaux  $2p_{\frac{1}{2}}$  et  $2s_{\frac{1}{2}}$  ne sont pas dégénérés. La différence d'énergie entre ces deux niveaux correspond au "Lamb shift". La prédiction correcte de cette différence a été un des premiers succès de QED.

## 7.6 Symétries de jauge: Une approche plus formelle

En physique, plusieurs phénomènes peuvent être compris, ou à tout le moins simplifiés, si on en dégage tout d'abord les symétries. C'est le cas en physique des particules où le modèle standard les interactions fondamentales par des principes de symétrie, celle sous des transformations de jauge locales. Il est possible de démontrer que ces symétries sont intimement liées avec la conservation locale (et non seulement globale) de quantités physiques telles que la charge électrique, la couleur, etc.

## Formalisme lagrangien

La connexion entre les symétries et les lois de conservation est plus facile à comprendre dans le cadre du formalisme lagrangien. Rappelons qu'en mécanique classique, les équations de mouvement des particules peuvent être obtenues à partir des équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (7.39)$$

où  $q_i$  sont les coordonnées généralisées de la particule,  $t$  la variable temporelle et  $\dot{q} = \frac{dq_i}{dt}$ . Le lagrangien du système est

$$L = T - V, \quad (7.40)$$

où  $T$  et  $V$  sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le formalisme discret avec les variables  $q_i$  peut être étendu au cas où le système est décrit par des coordonnées continues représentées par  $\phi(\vec{x}, t)$ . Le lagrangien est remplacé par une densité lagrangienne  $\mathcal{L}$ ,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu),$$

(où  $\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ ) devient fonction du champ  $\phi$  et de la variable continue  $x_\mu$ . Le système formé par les équations d'Euler-Lagrange prend la forme simple

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (7.41)$$

La densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  est définie telle que

$$L = \int \mathcal{L} d^3x.$$

Pour des raisons pratiques,  $\mathcal{L}$  sera appelé le lagrangien.

Chaque interaction fondamentale est décrite par un lagrangien particulier. Par exemple, le lagrangien de l'électrodynamique quantique (QED) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (7.42)$$

où  $\psi$  est un vecteur à quatre composantes appelé spineur ( $\bar{\psi} = \gamma_0\psi$ ) et  $\gamma^\mu$  sont les matrices ( $4 \times 4$ ) de Dirac. Le spineur  $\psi$  représente en fait la fonction d'onde des particules de spin  $\frac{1}{2}$  décrites par la théorie (i.e. les électrons). À noter qu'en substituant  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  dans l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient la célèbre équation de Dirac.

## Théorème de Noether et invariance de jauge globale

L'invariance d'une théorie (du lagrangien) sous une translation dans l'espace, une translation dans le temps et une rotation spatiale est associée à la conservation de l'impulsion, de l'énergie totale et du moment angulaire. On peut dire des transformations associées à ces quantités conservées qu'elles sont de nature spatio-temporelle. Les symétries qui nous intéressent sont des symétries internes. Par exemple, pour un électron décrit par le champ  $\psi$ ,  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  est invariant sous une transformation de phase globale,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x),$$

où  $\alpha$  est une constante réelle. Les transformations  $U(\alpha) = e^{i\alpha}$ , où l'unique paramètre  $\alpha$

peut prendre n'importe quelle valeur réelle, forment le groupe unitaire abélien  $U(1)$ .

La symétrie de  $\mathcal{L}_{QED}$  sous les transformations du groupe  $U(1)$  permet de mettre en évidence, à l'aide du théorème de Noether, l'existence d'un courant conservé. Considérons une version infinitésimale de la transformation  $U(1)$ ,

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha)\psi.$$

L'invariance du lagrangien sous cette transformation permet de trouver l'expression du courant conservé,

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (7.43)$$

tel que  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . De cette relation, il apparaît que la charge électrique,

$$Q = \int d^3x j^0, \quad (7.44)$$

est une quantité conservée ( $\frac{dQ}{dt} = 0$ ) et ce à cause de l'invariance sous les transformations du groupe  $U(1)$ .

D'un point de vue physique, l'existence d'une symétrie implique qu'une quantité soit impossible à mesurer. Par exemple, l'invariance d'un système sous translation signifie qu'il n'est pas possible de déterminer une position absolue dans l'espace. De façon similaire, l'invariance sous les transformations du groupe  $U(1)$  implique une quantité  $\alpha$  non-mesurable. Cette quantité n'a aucun sens physique et peut être choisie arbitrairement. Puisqu'il s'agit d'une constante, une fois qu'elle est fixée, elle est la même en tout point de l'espace-temps ( $x^\mu$ ). On dit alors de  $\alpha$  qu'elle est une jauge globale et que le système est invariant sous une transformation de jauge globale. En général toutefois, la phase peut dépendre de la position dans l'espace-temps ( $\alpha = \alpha(x)$ ).

## L'invariance de jauge locale en QED

QED est basée sur l'invariance des équations de mouvement sous des transformations de jauge du type

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (7.45)$$

où  $\alpha(x)$  est une fonction arbitraire de la position. On dira alors de QED qu'elle est invariante sous des transformations de jauge locales.  $\mathcal{L}_{QED}$  dans (7.42) n'est pas invariant sous les transformations locales du groupe  $U(1)$ . Pour rendre le lagrangien de QED invariant, on doit remplacer la dérivée partielle  $\partial_\mu$  par une dérivée covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (7.46)$$

où  $A_\mu$  est un champ vectoriel qui se transforme comme

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (7.47)$$

On peut alors vérifier que le lagrangien modifié

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned} \quad (7.48)$$

est invariant sous une transformation de jauge locale (éqs. (7.45) et (7.47)).

Par conséquent, en demandant que la théorie soit invariante sous  $U(1)$ , il devient

nécessaire d'introduire un champ vectoriel  $A^\mu$ , appelé champ de jauge, qui se couple aux particules représentées par  $\psi$ . En fait,  $A^\mu$  est associé au photon physique, c'est-à-dire la particule bosonique qui est responsable de l'interaction électromagnétique. Notez que le terme de couplage dans le lagrangien peut s'écrire  $-j^\mu A_\mu$ . En réalité, pour que  $A^\mu$  puisse être associé au photon, il est nécessaire d'introduire le terme dynamique

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

où  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est le tenseur de champ du photon. Il est intéressant de noter que l'introduction d'un terme de masse pour le photon n'est pas permise puisque  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$  n'est pas invariant sous les transformations de jauge locales. Le photon doit donc être sans masse. Le fait d'imposer sur le lagrangien fermionique libre une condition d'invariance sous des transformations locales mène donc à une théorie avec interaction,

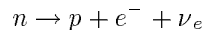
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (7.49)$$



## 8 INTERACTIONS FAIBLES

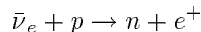
Voici quelques exemples d'interactions faibles observées dans la Nature:

- ▶ La désintégration du neutron



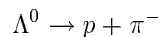
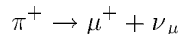
qui ne peut pas se produire via les interactions électromagnétiques sous peine de violer la conservation de la charge électrique.

- ▶ La capture de (anti)neutrinos



qui n'est possible que via les interactions faibles (la charge électrique et la charge colorée du neutrino sont nulles)

- ▶ La désintégration de hadrons uniquement en leptons ou en particules étranges



qui doit passer par les interactions faibles puisque les interactions électromagnétiques et fortes conservent les saveurs de quarks.

De fait, tous les quarks et les leptons sont soumis aux interactions faibles. À noter que c'est la seule interaction à laquelle sont soumis les neutrinos. Les interactions faibles sont caractérisées par des vies moyennes de  $10^{-8} - 10^{-10}$  s.

### 8.1 Classification des interactions faibles

On classe les interactions faibles par la nature des particules qu'elles mettent en jeu.

#### Leptoniques

Le  $W$  se couple seulement à des leptons (voir la figure 8.1).

#### Semi-leptoniques

Le  $W$  se couple aux leptons sur un sommet et aux quarks sur l'autre sommet. Ces échanges impliquent un changement de saveur de quarks qui peut entraîner la conservation ou l'absence de conservation de l'étrangeté, e.g.  $|\Delta S| = 0$  ou  $|\Delta S| = 1$  respectivement (voir les figures 8.2 et 8.3).

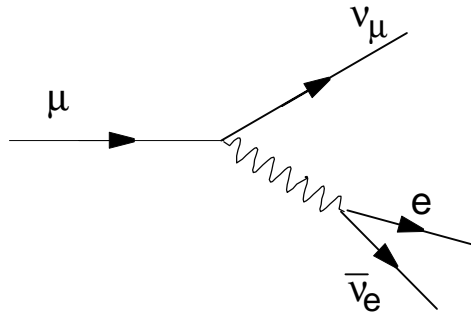


Figure 8.1 Désintégration leptonique du muon:  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ .

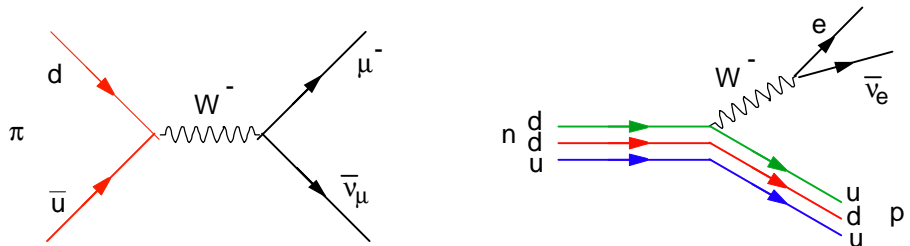


Figure 8.2 Réactions avec  $|\Delta S| = 0$ : Désintégration semi-leptonique du pion  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  (à gauche) et du neutron  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  (à droite).

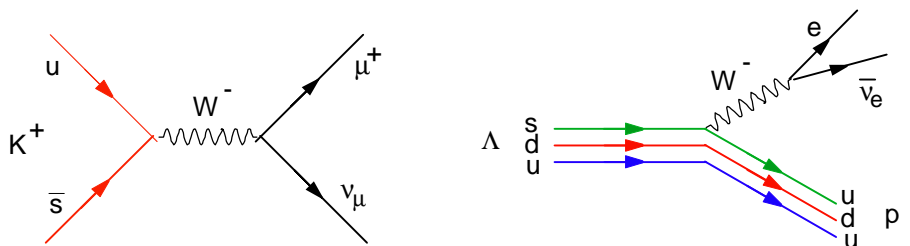


Figure 8.3 Réactions avec  $|\Delta S| = 1$ : Désintégration semi-leptonique du  $K^+$  via  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  (à gauche) et du  $\Lambda^0$  via  $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  (à droite).



### Non-leptoniques (hadroniques)

Dans ce cas, le  $W$  se couple aux quarks seulement (voir la figure 8.4).

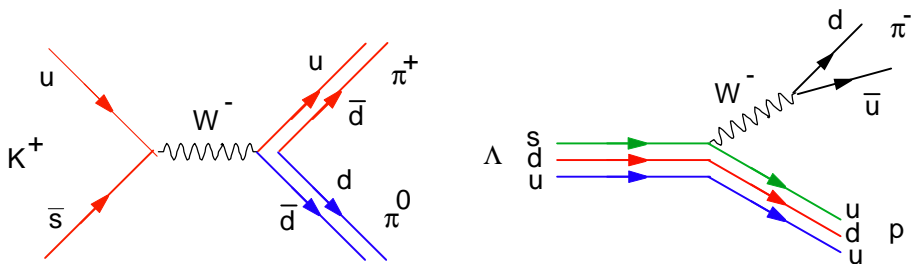


Figure 8.4 Désintégration hadronique du  $K^+$  via  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$  (à gauche) et du  $\Lambda^0$  via  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  (à droite).

Quoiqu'il en soit, toutes ces combinaisons se caractérisent par des couplages de la forme illustrée à la figure 8.5 où l'on note, d'après ces quelques réactions, que le  $W$  se couple à des doublets de fermions

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \dots \quad (8.1)$$

## 8.2 Théorie de Fermi et interaction $V - A$

Fermi formula durant les années 1930 sa désormais célèbre théorie des interactions faibles basée sur le postulat d'une interaction ponctuelle à 4-points. La force du couplage est donnée par la constante de Fermi  $G_F$ .

Ainsi le processus  $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$  est illustré par le diagramme de la figure 8.6

Le modèle de Fermi est basé sur une approche appelée de l'algèbre des courants. De façon générale, l'élément de matrice de transition en QED pour une interaction à 4-points s'écrit

$$M \propto \frac{e^2}{q^2} (J^{\text{em}})^\mu (J^{\text{em}})_\mu$$

où  $(J^{\text{em}})^\mu$  est un courant

$$(J^{\text{em}})^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

avec  $\psi$  un spineur de Dirac,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  le spineur conjugué et  $\gamma^\mu$  les matrices de Dirac. Cet élément de matrice décrit par exemple le processus de la figure 8.5.

Fermi propose de décrire l'interaction faible par une forme similaire soit

$$M = G_F (J_{\text{baryon}}^{\text{em}})^\mu (J_{\text{lepton}}^{\text{em}})_\mu = G_F (\bar{\psi}_n O_{\text{baryon}} \psi_p) (\bar{\psi}_e O_{\text{lepton}} \psi_\nu)$$

où  $O$  est un opérateur. Pour être compatible avec les observations expérimentales, la forme est fixée à

$$M = G_F \bar{\psi}_n \gamma^\mu (1 + \lambda \gamma_5) \psi_p \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu$$

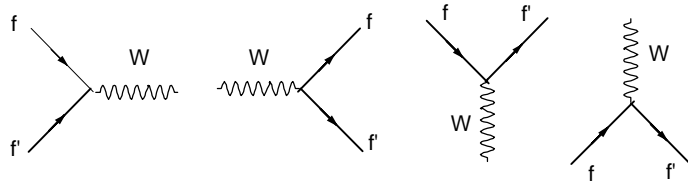


Figure 8.5 Type de couplage dans les interactions faibles (courant chargé).

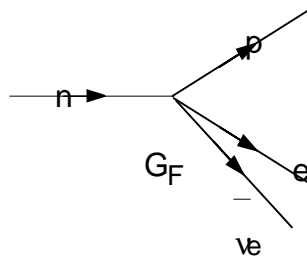


Figure 8.6 La théorie de Fermi décrit la désintégration du neutron  $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$  par une interaction à 4 points.

avec  $\lambda = -1.25, -0.69 \dots$  dépendant des baryons en jeu. Normalement  $\lambda = -1$  pour des réactions purement leptoniques, ce qui suggère que toute déviation de la valeur  $\lambda = -1$  est attribuable à la nature non ponctuelle des baryons.

Le modèle standard dont la partie électrofaible a été décrite par Glashow, Weinberg et Salam prévoit plutôt que l'interaction entre ces quatre particules se produit par l'échange de boson de jauge lourd, le  $W$  d'une masse de 80 GeV. Puisque la masse du  $W$  est si élevée, les interactions paraissent ponctuelles à basse énergie et restent compatibles avec la théorie de Fermi dans cette limite (voir la figure 8.7).

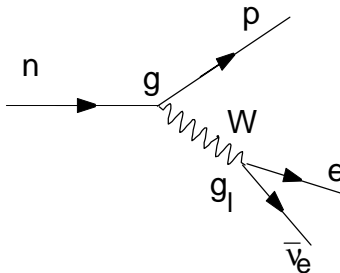


Figure 8.7 La théorie de Glashow-Weinberg-Salam explique l'interaction faible par l'échange de bosons massifs  $Z^0, W^-, W^+$ .

L'interaction faible permet deux types d'échanges: (voir la figure 8.8)

1. L'interaction vectorielle: Le spin de la particule reste intact. Le  $W$  ne porte aucun moment angulaire.
2. L'interaction axiale: Le spin de la particule change. Le  $W$  porte donc un moment angulaire.

La taux de transition étant donné par

$$\omega = 2\pi G_F^2 |M_{ij}|^2 \frac{dN}{dE_0}$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état final,  $\frac{dN}{dE_0}$  la densité d'état et  $M_{ij}$  l'élément de matrice. Les processus vectoriel et axial sont caractérisés par des taux de transition sensiblement différents

$$\begin{array}{lll} \Delta J(\text{lepton}) = 0 : & |M_{ij}|^2 \simeq 1 & \text{Processus de Fermi} \\ \Delta J(\text{lepton}) = 1 : & |M_{ij}|^2 \simeq 3 & \text{Processus de Gamov-Teller} \end{array}$$

La constante de Fermi est

$$\begin{aligned} G_F &= 1.02 \times 10^{-5} \hbar c \left( \frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 \\ &= 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned}$$

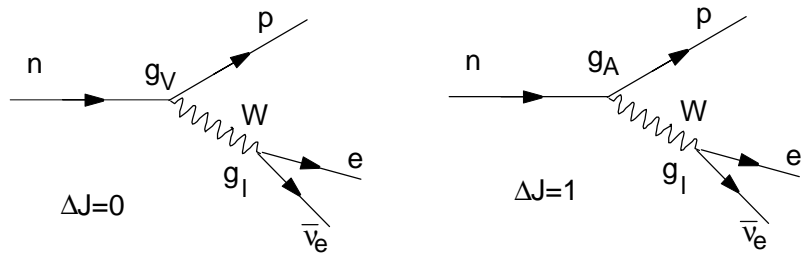


Figure 8.8 Les interaction vectorielle  $\Delta J = 0$  (à gauche) et axiale  $\Delta J = 1$  (à droite).

Mais dans le contexte de la théorie électrofaible, elle correspond à la limite

$$G_F = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{gg_l}{-q^2 + M_W^2} = \frac{gg_l}{M_W^2}$$

où  $g$  prend soit la valeur de  $g_A$  ou de  $g_V$  dépendant qu'on est présence d'interactions axiales ou vectorielles respectivement. Expérimentalement, on constate

$$g_A \simeq -g_V$$

ce qui a valu à cette interaction d'être nommée "interaction  $V - A$ ".

## 8.3 Non conservation de la parité

Les premières observations de violation de la parité furent obtenues en 1956 dans des processus impliquant des désintégrations  $\beta$ . Par exemple, dans la désintégration  $\beta$  d'un noyau de Cobalt 60 avec le spin aligné par un champ magnétique fort soumis à des température d'environ 0.01K, on mesura un taux plus élevé d'électrons émis avec un spin opposé à celui du cobalt. (voir la figure 8.9).

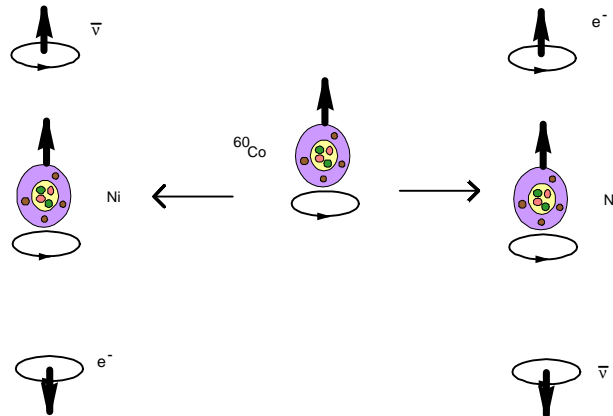


Figure 8.9 Modes de désintégration du  $^{60}\text{Co}$ .

La conservation de la parité nécessite toutefois qu'une égale proportion d'électrons alignés et anti-alignés (voir la figure 8.10).

On interprète maintenant ce résultat comme une interférence entre les parties vectorielle et axiale des éléments de matrice  $M_{ij}$ . La première partie se comporte comme les vecteurs  $\mathbf{V}$  (e.g.  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ ,...). alors que la partie axiale  $\mathbf{A}$  se comporte comme un spin ou un moment angulaire. Tout processus qui dépend d'un produit de la forme  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$  viole la conservation de la parité.

Les éléments de matrice  $M_{ij}$  peuvent s'écrire en général  $M_{ij}^V - M_{ij}^A$  d'où

$$|M_{ij}|^2 = |M_{ij}^V|^2 + |M_{ij}^A|^2 - 2M_{ji}^V M_{ij}^A$$

Le dernier terme change sous une réflexion et viole donc la parité.

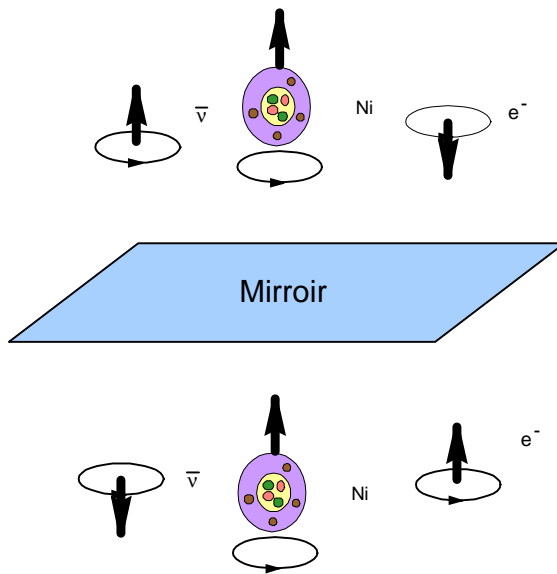


Figure 8.10 Les deux états finaux sont reliés par une opération de réflexion (parité).

À noter que la conjugaison de charge est aussi violée dans le processus si bien que celui-ci reste invariant sous  $CP$ .

## 8.4 Théorie électrofaible

Le premier exemple de théorie unifiée est sans doute la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell. Maxwell réalisa que deux phénomènes qui paraissaient pourtant tout à fait distincts, l'électricité et le magnétisme, peuvent être décrits par un formalisme unique et proposa ses fameuses équations de l'électromagnétisme. Glashow, Weinberg et Salam ont aussi démontré beaucoup plus récemment que l'électromagnétisme et les interactions faibles sont des manifestations d'une seule et même interaction, l'interaction électrofaible (voir la figure 8.11).

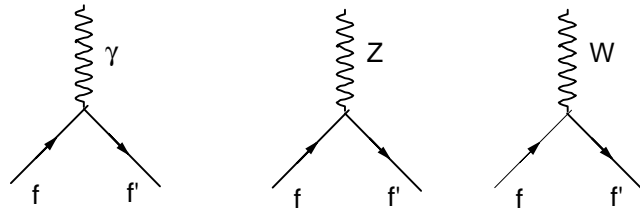


Figure 8.11 Vertex d'interactions électrofaibles.

Alors que le couplage électromagnétique est de

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137},$$

la théorie de Fermi introduit le couplage

$$G_F = \frac{g_W^2}{M_W^2}$$

et le modèle de Glashow-Weinberg-Salam (voir les figures 8.6 et 8.7) permet de définir un couplage faible adimensionnel  $\alpha_W$  tel que

$$\alpha_W = \frac{g_W^2}{4\pi} = \frac{G_F M_W^2}{4\pi}.$$

On peut postuler qu'en cas d'unification,  $\alpha_{em} = \alpha_W$ . Il en découle

$$M_W^2 \sim \frac{4\pi}{137 G_F} = \frac{4\pi}{137 \times 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}} = 88.5 \text{ GeV}.$$

Cette valeur diffère de la masse réelle de  $W$ , soit  $M_W = 80.22 \text{ GeV}$ , ce qui indique que cette dernière conclusion est probablement un peu trop naïve.

## Charge faible

Dans les interactions faibles:

1. La composante d'hélicité  $R$  de la particule ( $L$  de l'antiparticule) n'a pas d'interactions faibles (charge faible nulle).
2. La composante d'hélicité  $L$  de la particule ( $R$  de l'antiparticule) interagissent par paires de particules

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \dots, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \dots$$

Les particules peuvent être classifiées selon leur isospin faible  $I^W$  dont la troisième composante  $I_3^W$  est la charge faible: pour le doublet  $I^W = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} I_3^W = \frac{1}{2} \\ I_3^W = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \dots \quad (8.2)$$

alors que pour le singulet  $I^W = 0$

$$(I_3^W = 0) = \nu_{eR}, e_R, \nu_{\mu R}, \mu_R, \dots, u_R, d_R, c_R, s_R, \dots$$



### Remarque 8.1

*Il ne faut pas confondre l'isospin faible avec l'isospin fort issu de l'invariance des interactions fortes sur la charge électrique. Le traitement est similaire à certains égards mais l'isospin faible est associé à une symétrie de jauge locale (interaction de jauge) alors que l'isospin fort est une symétrie de jauge globale (conservation de nombres quantiques seulement). La même distinction s'applique à l'hypercharge faible vis-à-vis l'hypercharge forte.*

1. On peut aussi définir l'hypercharge faible selon

$$Q = I_3^W + \frac{Y^W}{2}$$

où  $Y^W = -1$  pour les doublets et  $Y^W = -2$  pour les singulets.  $I^W$  et  $Y^W$  commutent entre eux et sont décrits par les groupes de jauge

$$SU_L(2) \otimes U_Y(1).$$

## Modèle de Weinberg-Salam (survol)

La théorie électrofaible est basée sur l'invariance de jauge  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  alors que QED est basée sur le groupe  $U_{em}(1)$ . Les transformations de jauge peuvent être définies comme suit:

Hypercharge faible: Un champ  $\psi$  se transforme suivant la symétrie de jauge  $U_Y(1)$ ,

$$\psi \rightarrow \psi' = V\psi \quad \text{où } V = e^{i\alpha(x)}$$



Isospin faible: Un doublet de champ  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_L$  se transforme suivant la symétrie de jauge  $SU_L(2)$ ,

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_L \rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix}_L = U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_L \quad \text{où } U \in SU(2)$$

alors qu'un singulet reste intact sous la même transformation

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \psi_R.$$

Pour préserver l'invariance de jauge, il est nécessaire d'introduire les champs de jauge suivants:

$B_\mu$  = champ de jauge pour  $Y^W$  ( $U_Y(1)$  a 1 générateur)

$A_\mu^k$  = 3 champs de jauge pour  $I^W$  ( $SU_L(2)$  a 3 générateurs,  $k = 1, 2, 3$ ).

Les lagrangiens respectifs s'écrivent alors

1. Pour les fermions: les fermions interagissent avec les bosons de jauge via

$$\mathcal{L}_\psi = \underbrace{\bar{\psi}_R (i\gamma^\mu \partial_\mu - g' \gamma^\mu B_\mu) \psi_R}_{Y^W = -2} + \underbrace{\bar{\psi}_L \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{g'}{2} \gamma^\mu B_\mu + \frac{g}{2} \tau^k \gamma^\mu A_\mu^k \right) \psi_L}_{Y^W = -1}$$

où  $g$  et  $g'$  sont des constantes de couplage associées à  $A_\mu^k$  et  $B_\mu$  respectivement.

2. Pour les champs de jauge: la dynamique des bosons de jauge est décrite par

$$\mathcal{L}_{Jauge} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^k A^{k\mu\nu}$$

où

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ A_{\mu\nu}^k &= \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \end{aligned}$$

Le premier terme  $-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$  est très similaire au lagrangien décrivant les champs de photons en QED. Il est basé sur le groupe de symétrie  $U(1)$  tout comme QED. Poursuivant cette analogie, rappelons qu'en QED, le photon ne peut pas interagir directement avec lui-même puisqu'il est neutre. Le second terme du lagrangien  $-\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^k A^{k\mu\nu}$  est une généralisation du lagrangien de QED pour le groupe  $SU(2)$ . Il est à noter que le groupe  $SU(2)$  est non-abélien (non-commutatif) si bien que la contribution  $g \varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j$  implique des interactions entre les bosons de jauge de  $SU(2)$ .

L'invariance de jauge requiert que les quatre bosons de jauge  $B_\mu$  et  $A_\nu^k$  soient sans masse. Ce qu'on observe plutôt, ce sont le photon et les bosons massifs  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Cela implique que les lagrangiens devraient inclure des termes de masse de la forme

$$\mathcal{L}_{Masse} = M_W^2 W^{+\nu} W_\nu^+ + M_W^2 W^{-\nu} W_\nu^- + M_Z^2 Z^{0\nu} Z_\nu^0. \quad (8.3)$$

c'est-à-dire des termes quadratiques en fonction des champs  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Ces termes ne sont pas invariants sous les transformations de jauge. S'ils sont présents, on dit alors que la symétrie est brisée. Il existe plusieurs façons d'introduire ces termes de brisure explicitement, dynamiquement ou dans le cas qui nous intéresse spontanément. Il reste que pour des énergies très élevées, les masses des  $W^\pm$  et  $Z^0$  sont négligeables et la

symétrie de jauge est restaurée.



### Remarque 8.2

*L'existence de bosons d'interactions  $W^\pm$  et  $Z^0$  fut confirmée en 1983 lorsque ceux-ci furent produits et observés directement au collisionneur  $pp(p\bar{p})$  SPS du CERN. Cette confirmation expérimentale valut le prix Nobel de physique 1984 à C. Rubbia et S. van der Meer.*

## Mécanisme et particule de Higgs

Dans le modèle standard, la brisure de symétrie est due au mécanisme de Higgs (brisure spontanée) par lequel intervient un mélange des  $B_\nu$  et  $A_\nu^k$  dont le résultat est la présence des bosons massifs  $W_\nu^\pm$  qui sont des combinaisons de  $A_\nu^1$  et  $A_\nu^2$  et de deux autres bosons

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + A_\mu^3 \sin \theta_W \\ Z_\mu^0 &= -B_\mu \sin \theta_W + A_\mu^3 \cos \theta_W. \end{aligned}$$

Le mécanisme de Higgs est basé sur l'idée que même si les équations de mouvement possèdent une symétrie, les solutions, ne sont pas nécessairement symétriques.



### Remarque 8.3

*Il existe plusieurs exemples de brisure spontanée de symétrie en physique:*

- (1) *Une barre de métal cylindrique sur laquelle on applique une pression dans le sens de sa longueur s'oriente en pliant selon une direction privilégiée brisant la symétrie cylindrique du système.*
- (2) *Les spins dans un ferromagnétique à température élevée sont orientés aléatoirement. En abaissant la température les spins s'alignent dans une direction privilégiée brisant la symétrie sous rotation.*

## Mécanisme de Higgs

Plus précisément, le mécanisme proposé par Higgs pour générer la brisure de symétrie introduit des champs scalaires couplés à l'interaction de jauge. Les scalaires apparaissent sous forme d'un doublet électrofaible  $\phi$  dont le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_\phi = \left( \partial_\mu \phi - i \frac{g'}{2} B_\mu \phi + i \frac{g}{2} \tau^k A_\mu^k \phi \right)^\dagger \left( \partial_\mu \phi - i \frac{g'}{2} B_\mu \phi + i \frac{g}{2} \tau^k A_\mu^k \phi \right) - V(\phi) \quad (8.4)$$

où  $V(\phi)$  est le potentiel qui décrit les interactions des scalaires entre-eux et le terme de masse. Le lagrangien total

$$\mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{Jauge} + \mathcal{L}_\phi$$

est alors invariant de jauge sous  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ .

Si l'état fondamental de  $\phi$  (le vide) est de la forme

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

où  $v \neq 0$  est une constante, alors  $\phi$  n'est pas invariant de jauge et brise la symétrie.

Dans cette limite

$$\begin{aligned} \left( \partial_\mu \phi - i \frac{g'}{2} B_\mu \phi + i \frac{g}{2} \tau^k A_\mu^k \phi \right) &= \left( \partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu + i \frac{g}{2} \tau^k A_\mu^k \right) \left( \frac{0}{\frac{v}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= \frac{i}{2} \frac{v}{\sqrt{2}} \left[ g' B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + g A_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + g A_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + g A_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g A_\mu^1 - i g A_\mu^2 \\ g' B_\mu - g A_\mu^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi \xrightarrow{\phi \rightarrow v} \mathcal{L}_{Masse} &= \frac{v^2}{8} \left[ (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 + (g A_\mu^1 - i g A_\mu^2)^2 \right] \\ &= \frac{v^2}{8} \left[ (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 + g^2 A_\mu^1 A^{1\mu} + g^2 A_\mu^2 A^{2\mu} \right] \end{aligned}$$

et en définissant

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm i A_\mu^2) \\ A_\mu &= \frac{g' B_\mu + g A_\mu^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \\ Z_\mu^0 &= \frac{g' B_\mu - g A_\mu^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \end{aligned}$$

on peut récrire

$$\mathcal{L}_{Masse} = \left[ \left( \frac{vg}{2} \right)^2 W^{+\nu} W_\nu^+ + \left( \frac{vg}{2} \right)^2 W^{-\nu} W_\nu^- + \left( \frac{v\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} \right)^2 Z^{0\nu} Z_\nu^0 \right]$$

Les termes de masse étant quadratiques en  $W^\pm$  et  $Z^0$ , il est alors facile d'identifier les masses de (8.3) soient

$$\begin{aligned} \text{Masse de } A_\mu &= 0 && \implies \text{photon sans masse} \\ \text{Masse de } Z_\mu^0 &= \frac{v\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} = M_Z && \implies Z_\mu^0 \\ \text{Masse de } W_\mu^\pm &= \frac{vg}{2} = M_W && \implies W_\mu^\pm \end{aligned}$$

De plus, ayant identifié  $A_\mu$  au photon, on obtient que la charge

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad (8.5)$$

détermine l'angle de mélange appelé l'angle de Weinberg

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad \text{et} \quad \frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W < 1.$$

Expérimentalement, on mesure

$$\sin^2 \theta_W \simeq 0.233$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} M_Z &= 1.14M_W \\ &= 91.187 \text{ GeV.} \end{aligned}$$

## Particule de Higgs

Le doublet de scalaire introduit par Higgs a la propriété inhabituelle d'avoir un minimum non-nul ou autrement dit, la valeur du champ n'est pas nulle dans son état fondamental.

Rappelons qu'en électromagnétisme, l'énergie emmagasiné dans les champs est la somme des carrés de l'amplitude du champ électrique et de l'amplitude du champ magnétique. Le minimum se trouve au point où les deux champs sont nuls (voir la figure 8.12)

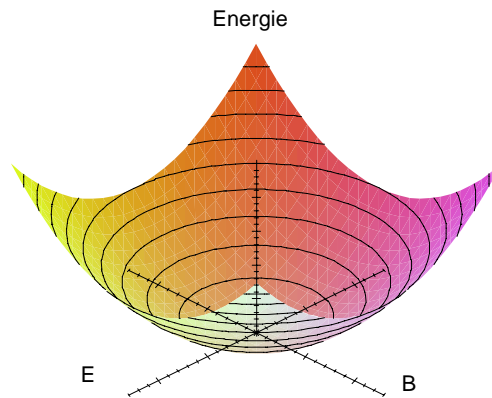


Figure 8.12 Énergie du champ électromagnétique en fonction de l'amplitude du champ électrique (axe des  $x$ ) et de l'amplitude du champ magnétique (axe des  $y$ ).

Pour la particule de Higgs ou plus simplement le Higgs, l'état fondamental est déterminé par le minimum du potentiel  $V(\phi)$  dans (8.4). Le potentiel (renormalisable) le plus simple qui brise la symétrie est

$$V(\phi) = \lambda (\phi^\dagger \phi - v^2)^2$$

illustré à la figure 8.13 où  $V(\phi)$  est représenté en fonction de  $\text{Re } \phi$  et  $\text{Im } \phi$ . Un optimum se trouve en  $\phi = 0$ , mais il s'agit d'un maximum relatif (état instable). Toutefois une infinité d'état fondamentaux sont possibles (minimum absolu) pour lesquels

$$|\phi| = v \quad \text{ou} \quad \phi = ve^{i\theta}$$

où la phase  $\theta$  correspond à la direction dans le plan  $\text{Re } \phi - \text{Im } \phi$ .

On note la brisure de symétrie (cylindrique en  $\text{Re } \phi$  et  $\text{Im } \phi$ ) à la figure 8.13 dès que l'état fondamental (le vide) est déterminé uniquement e.g. la phase  $\theta = 0$  est choisie. Donc dans le vide lorsque l'énergie est nulle, le champ de Higgs est non-nul.

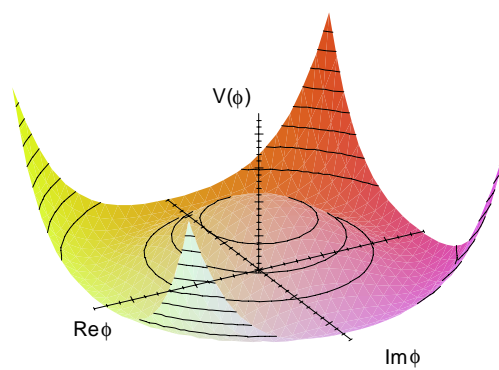


Figure 8.13 Le minimum d'énergie du champ de Higgs est déterminé par le terme de potentiel (8.4) (chapeau mexicain). Les axe  $x$  et  $y$  représentent  $\text{Re}\phi$  et  $\text{Im}\phi$  respectivement.

Le Higgs a la particularité d'avoir les mêmes nombres quantiques que le vide (toutes les charges sont nulles) sauf pour la masse qui est non-nulle. Dans les faits, le vide peut donc être habité par des particules de Higgs virtuelles et toute particule  $\gamma$  voyageant pourra être soumise à des interactions avec le Higgs. Il en résulte que des particules à l'origine sans masse se comportent comme si elles avaient une masse.

Le Higgs est la seule particule du modèle standard qui élude encore la détection. Les contraintes expérimentales requièrent

$$M_{H^0} \geq 77.5 \text{ GeV.}$$

## 8.5 Angle de Cabbibo et matrice de Kobayashi-Maskawa

On remarque expérimentalement que les transitions  $|\Delta S| = 1$  s'effectuent à un taux beaucoup plus faible que les transitions  $|\Delta S| = 0$  et ce, d'un facteur 20 environ. En 1963, Cabibbo propose l'explication suivante. Puisque les quarks  $d$  et  $s$  ont les mêmes nombres quantiques (exceptions faites de la masse et de la saveur), il est possible que ce soit un mélange de ces deux quarks qui interagisse ponctuellement avec le  $W$  soit

$$d_C = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C.$$

Au lieu des doublets faibles de (8.2), on retrouve

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Il s'en suit que le couplage  $u - d$  est caractérisé par  $|\Delta S| = 0$  et une amplitude de probabilité

$$\propto G_F \cos \theta_C$$

alors que le couplage  $s - d$  est caractérisé par  $|\Delta S| = 1$  et une amplitude de probabilité

$$\propto G_F \sin \theta_C$$

où  $\theta_C \simeq 0.23$ . Par exemple, on aura

Désintégration	Changement de saveur	Taux
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$d \rightarrow u$	$G_F^2 \cos^2 \theta_C$
$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$	$u \rightarrow d$	$G_F^2 \cos^2 \theta_C$
$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	$s \rightarrow u$	$G_F^2 \sin^2 \theta_C$
$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$	—	$G_F^2$

et le rapport entre les taux des  $K^+ \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$  ( $|\Delta S| = 1$ ) et  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  ( $|\Delta S| = 0$ ) est

$$\frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C}{G_F^2 \cos^2 \theta_C} = \tan^2 \theta_C \simeq \frac{1}{20}.$$

Le mélange de Cabibbo peut s'exprimer par le courant chargé porté par le  $W$

$$J_W^+ = (\bar{u}, \bar{c}) \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}.$$

Pour tenir compte de certaines déviations de la théorie de Cabibbo et de la présence de

six quarks, Kobayashi et Maskawa ont introduit le courant généralisé

$$J_W^+ = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) M \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

où  $M$  est la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 s_1 & s_1 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_2 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 c_3 s_2 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

où

$$c_i = \cos \theta_i \quad s_i = \sin \theta_i \quad i = 1, 2, 3.$$

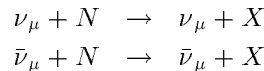
Le mélange est caractérisé par trois angles d'Euler  $\theta_i$  et six phases dont une seule est observable. Les valeurs de ces paramètres sont déterminées expérimentalement et mènent à

$$M = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.22 & 0.004 \\ -0.22 & 0.97 & 0.04 \\ 0.004 & -0.04 & 0.99 \end{pmatrix}.$$

À noter que la phase  $\delta$  introduit un terme qui viole l'invariance sous la transformation  $CP$ .

## 8.6 Courants neutres

L'observation de processus impliquant des courants faibles chargés (échange de  $W$ ) date des années 1960. Ce n'est toutefois qu'au CERN en 1973 qu'on détecta des événements mettant en jeu des courants faibles neutres (échange de boson neutre  $Z^0$ ). On démontra l'existence d'interaction de  $\nu_\mu$  avec la matière en absence de leptons chargés en produisant un faisceau de neutrinos ou antineutrinos par la réaction  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  ou  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  ayant comme cible des nucléons soit



où  $N$  est le nucléon et  $X$  dénote une collection de hadrons (voir la figure 8.14).

## 8.7 Mécanismes de GIM (Glashow-Illiopoulos-Maiani) et le charme

Toutes les observations de courants neutres faites à date respectent la règle  $|\Delta S| = 0$ . Par exemple, si on compare les processus  $|\Delta S| = 1$  dans les mesures des taux de désintégration du  $K^+$  par les voies neutres et chargées (voir la figure 8.15), on obtient le rapport

$$\frac{K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}}{K^+ \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e} < 10^{-5}$$

À première vue, on s'explique mal cette règle de sélection puisque dans le cas de courants chargés des processus  $|\Delta S| = 0$  et  $|\Delta S| = 1$  sont tous deux observés.

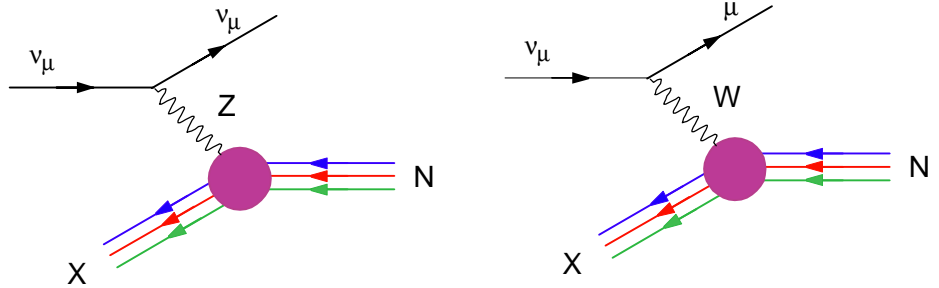


Figure 8.14 Diffusion  $\nu - N$

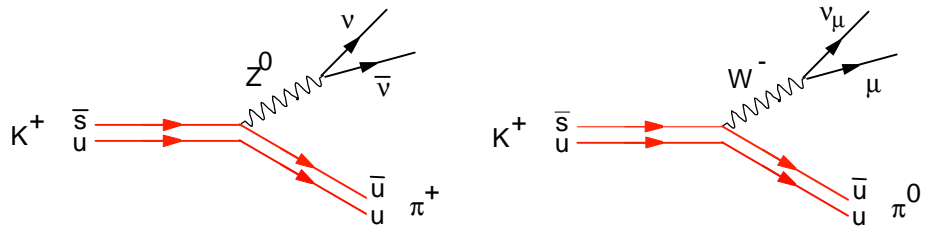


Figure 8.15 Désintégration du  $K^+$  par les voies neutres  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}$  et chargées  $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ .



Si on ne considère que les quarks  $u, d, s$ , le couplage des courants neutres a la forme (voir la figure 8.16)

$$u\bar{u} + d_C\bar{d}_C = \underbrace{u\bar{u} + d\bar{d} \cos^2 \theta_C + s\bar{s} \sin^2 \theta_C}_{|\Delta S|=0} + \underbrace{(\bar{s}d + s\bar{d}) \sin \theta_C \cos \theta_C}_{|\Delta S|=1} \quad (8.7)$$

où

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Le deuxième terme n'est pas observé puisque le processus  $|\Delta S| = 1$  est fortement supprimé.

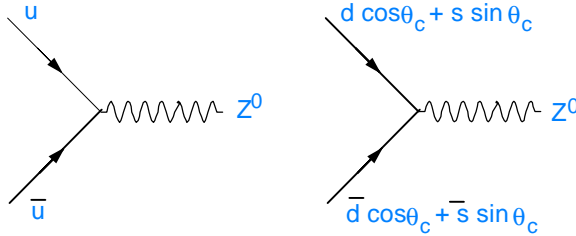


Figure 8.16 Interactions quarks- $Z^0$  pour un modèle à trois quarks.

En 1970 Glashow, Iliopoulos et Maiani, (GIM) proposent un nouveau quark, le charme, qui forme un doublet d'interaction faible

$$\begin{pmatrix} c \\ s_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_C - d \sin \theta_C \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Le courant neutre a maintenant deux nouvelles contributions (voir la figure 8.17)

$$c\bar{c} + s_C\bar{s}_C = \underbrace{c\bar{c} + s\bar{s} \cos^2 \theta_C + d\bar{d} \sin^2 \theta_C}_{|\Delta S|=0} - \underbrace{(\bar{s}d + s\bar{d}) \sin \theta_C \cos \theta_C}_{|\Delta S|=1}. \quad (8.10)$$

En additionnant les expressions (8.7) et (8.10), il ressort que les termes  $|\Delta S| = 1$  s'annulent automatiquement:

$$u\bar{u} + d_C\bar{d}_C + s_C\bar{s}_C \pm c\bar{c} = \underbrace{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}}_{|\Delta S|=0}.$$



#### Remarque 8.4

Le quark charme fut découvert en 1974 à SLAC et à Cornell presque simultanément sous la forme du  $J/\psi$ . Le  $J/\psi$  est un état lié  $c\bar{c}$  produit par annihilation  $e^+e^-$ . À l'époque, cette particule a fait l'objet d'une polémique à savoir lequel des deux groupes en avait fait la découverte en premier. La communauté scientifique n'a jamais tranché la question préférant attribué la paternité de la découverte aux deux groupes. Cela explique le nom (ou les deux noms) de la particule  $J/\psi$  mais aussi que le prix Nobel de physique 1976 ait été attribué aux directeurs des deux collaborations B. Richter et S.C.C. Ting.

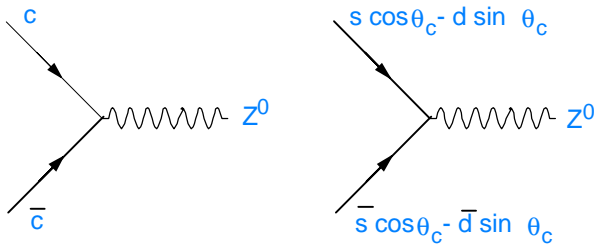


Figure 8.17 Interactions additionnelles quarks- $Z^0$  pour un modèle à quatre quarks (mécanisme de GIM).

## 8.8 Physique du $K^0$ et $\bar{K}^0$

Le système des Kaons  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  se révèle être un endroit privilégié pour tester les propriétés d'invariance sous  $\mathcal{CP}$ . Rappelons que les Kaons possèdent les propriétés suivantes:

	$I_3 = \frac{1}{2}$	$I_3 = -\frac{1}{2}$
$S = +1$	$K^+(u\bar{s})$	$K^0(d\bar{s})$
$S = -1$	$K^0(ds)$	$K^-(\bar{u}s)$

où les  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  peuvent être produits *fortement* par des processus distincts soit  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & K^0 & + & \Lambda^0 \\ S & & & & & & \\ 0 & & 0 & & +1 & & -1 \end{array}$$

et  $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \bar{K}^0 + p$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^+ & + & p & \rightarrow & K^+ & + & \bar{K}^0 & + & p \\ S & & & & & & & & \\ 0 & & 0 & & +1 & & +1 & & 0 \end{array}$$

illustrés à la figure 8.18.

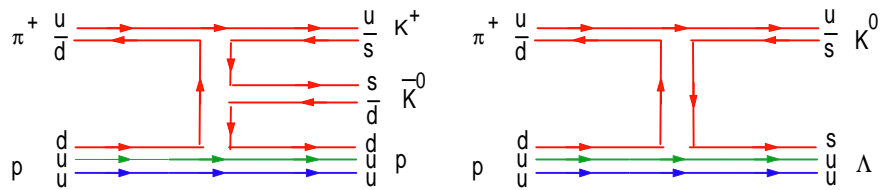


Figure 8.18 Diagrammes de flot de quarks pour les processus de production de  $K^0$  et  $\bar{K}^0$ .

On note par ailleurs que  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  sont l'antiparticule l'une de l'autre et donc sous conjugaison de charge

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

ce qui constitue une variation de  $|\Delta S| = 2$ . Il en découle que:

- ▶ puisque  $S$  est conservée dans les interactions fortes, tout couplage  $K^0 - \bar{K}^0$  via les interactions fortes est interdit.
- ▶ les interactions faibles permettent  $|\Delta S| = 1$ , donc un couplage  $K^0 - \bar{K}^0$  est possible mais doit passer par deux processus intermédiaires chacun ayant  $|\Delta S| = 1$  (processus du 2<sup>e</sup> ordre).

Considérons par exemple les  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  qui peuvent tous deux se désintégrer en  $\pi^+\pi^-$  (voir la figure 8.19). Expérimentalement, on observe que les  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  peuvent tout aussi bien se désintégrer en  $\pi^+\pi^-\pi^0$ . Un couplage indirect  $K^0 - \bar{K}^0$  est donc possible via un état intermédiaire de  $2\pi$  ou de  $3\pi$  (ou plus précisément un mélange de ces deux

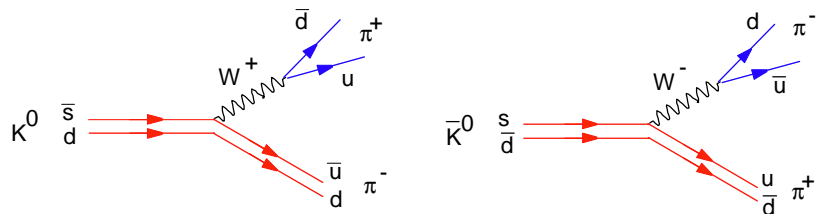


Figure 8.19 Modes de désintégration des  $K^0$  et  $\bar{K}^0$ .

états)

$$\begin{array}{ccc}
 & & 2\pi \\
 & \nearrow & \nwarrow \\
 K^0 & & \bar{K}^0 \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & 3\pi \\
 |\Delta S| = 1 & & |\Delta S| = 1
 \end{array}$$

ou même encore par l'échange de deux bosons  $W$  (voir la figure 8.20).

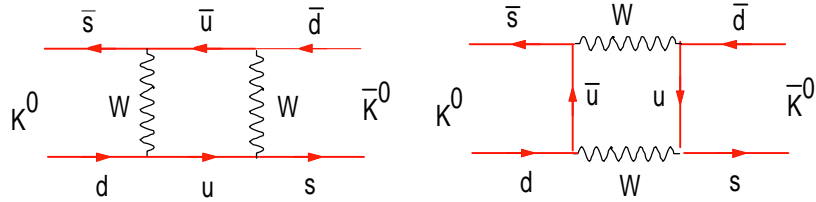


Figure 8.20 Mélange  $K^0 - \bar{K}^0$  par échange de deux  $W$ .

Quoiqu'il en soit, malgré un taux relativement faible, le couplage  $K^0 - \bar{K}^0$  est présent. Ceci implique qu'un état formé purement de  $K^0$  à un temps  $t = 0$ , devient au temps  $t$  une superposition  $K^0 - \bar{K}^0$

$$|K^0(t)\rangle = \alpha(t) |K^0(t)\rangle + \beta(t) |\bar{K}^0(t)\rangle.$$

Mais pour les interactions faibles, ce sont les états propres de  $\mathcal{CP}$  qui se désintègrent soit

$$\mathcal{CP} |K^0\rangle = \eta |K^0\rangle \quad \mathcal{CP} |\bar{K}^0\rangle = \eta' |\bar{K}^0\rangle$$

où  $\eta$  et  $\eta'$  sont des phases arbitraires. Posons  $\eta = \eta' = 1$ , et définissons les états propres  $\mathcal{CP}$

$$\begin{aligned}
 |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) & \mathcal{CP} |K_1\rangle &= |K_1\rangle \\
 |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) & \mathcal{CP} |K_2\rangle &= -|K_2\rangle.
 \end{aligned}$$

#### Remarque 8.5

Les  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  se distinguent par leur interactions fortes ( $S = 1$  et  $-1$  respectivement) alors que  $K_1$  et  $K_2$  se distinguent de par leurs interactions faibles (états propres de  $\mathcal{CP}$ ).



## Modes de désintégration

À cause de leur propriété  $\mathcal{CP} = \pm 1$ , leurs modes de désintégration diffèrent:  $K_1$  ( $\mathcal{CP} = 1$ ) se désintègre en  $2\pi$  alors que le  $K_2$  donne  $3\pi$  avec des taux observés de

$$\mathcal{CP} = +1 : \quad |K_1\rangle \rightarrow 2\pi \quad \tau_1 = 0.9 \times 10^{-10} \text{s}$$

$$\mathcal{CP} = -1 : \quad |K_2\rangle \rightarrow 3\pi \quad \tau_2 = 0.5 \times 10^{-7} \text{s}$$

Puisque  $K_1$  et  $K_2$  ne sont pas l'antiparticule l'une de l'autre, leur mode de désintégration, leur vie moyenne et leur masse diffèrent.

L'évolution de l'amplitude de  $K_1$  du temps  $t = 0$  au temps  $t$  s'écrit

$$a_1(t) = a_1(0)e^{-iE_1 t} e^{-\frac{\Gamma_1 t}{2}}$$

où le premier facteur exponentiel correspond à une onde ( $\propto e^{-i\omega t}$ ),  $E_1$  étant l'énergie, alors que le second facteur vient de la désintégration avec  $\Gamma_1 = \tau_1^{-1}$ , la largeur de désintégration.

Pour un faisceau  $K_1$  pur au temps  $t = 0$ , l'intensité du faisceau au temps  $t$  s'écrit

$$\begin{aligned} I(K^0) &= \frac{(a_1(t) + a_2(t)) (a_1^*(t) + a_2^*(t))}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \cos(M_2 - M_1)t \right) \\ I(\bar{K}^0) &= \frac{(a_1(t) - a_2(t)) (a_1^*(t) - a_2^*(t))}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)t} \cos(M_2 - M_1)t \right) \end{aligned}$$

où  $E_{1,2} = M_{1,2}$  dans les centres de masse respectifs des  $K_1$  et  $K_2$ . On remarque que le premier et second terme correspondent respectivement à des désintégrations rapides ( $\tau_1$  courte) et lente ( $\tau_2$  grande). Par ailleurs, le troisième terme est responsable d'oscillations dans les intensités. La figure 8.21 qui suit représente en unités arbitraires  $I(K^0)$  (en bleu) et  $I(\bar{K}^0)$  (en rouge) pour des valeurs de  $M_2 - M_1$  croissantes.

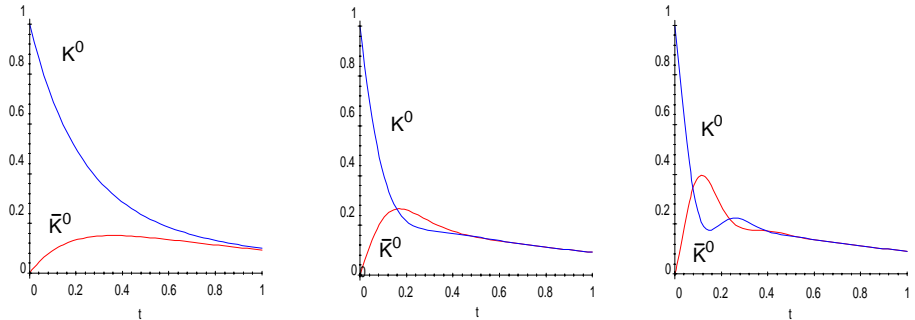


Figure 8.21  $I(K^0)$  (en bleu) et  $I(\bar{K}^0)$  (en rouge) pour des valeurs de  $M_2 - M_1$  croissantes.

Une mesure expérimentale appropriée de la proportion  $K^0 - \bar{K}^0$  en fonction de la distance pour un faisceau initial  $K^0$  pur permet de déduire la différence de masse  $\Delta M = M_2 - M_1$ . On obtient expérimentalement une variation de

$$\Delta M = 3.52 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

soit un changement relatif de

$$\frac{\Delta M}{M} = 0.7 \times 10^{-14}.$$

## 8.9 Violation de $\mathcal{CP}$

La violation de la parité fut découverte dans les interactions faibles en 1956 mais on s'entendit longtemps pour dire que  $\mathcal{CP}$  devait être conservée. En 1964 cependant, Christianson, Cronin, Fitch et Turlay démontrèrent que l'état avec une longue vie moyenne pouvait aussi se désintégrer en  $2\pi$  dans une proportion de  $10^{-3}$ . Cet état appelé  $|K_L\rangle$  qui est en grande partie formé de  $|K_2\rangle$  contient donc une partie de  $|K_1\rangle$ . De la même façon, un autre état  $|K_S\rangle$ , de vie moyenne courte est aussi un mélange  $|K_1\rangle - |K_2\rangle$  dominé par  $|K_1\rangle$  soit:

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= a_L |K_2\rangle + b_L |K_1\rangle \\ |K_S\rangle &= a_S |K_2\rangle + b_S |K_1\rangle \end{aligned}$$

où  $a_L \gg b_L$  et  $a_S \ll b_S$ .

L'expérience de 'Cronin et Fitch' consiste à observer les  $K_L$  se désintégrer grâce à un spectromètre à deux bras et à des chambres à étincelles. Les  $\pi^+ \pi^-$  sont détectés respectivement dans chacun des bras ce qui permet un calcul de la masse invariante du système  $\pi^+ \pi^-$ ,  $M_{\pi\pi}$  (voir la figure 8.22).

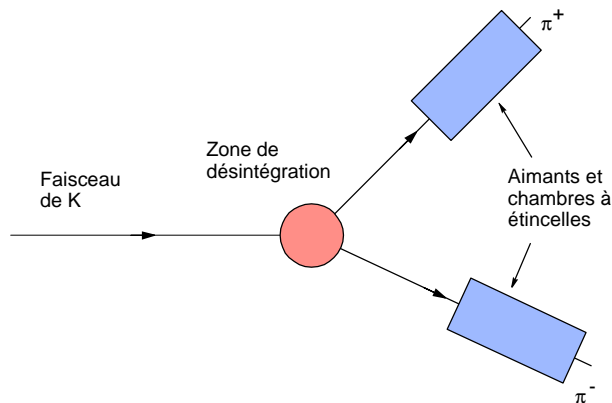


Figure 8.22 L'expérience de 'Cronin et Fitch' pour observer les désintégrations de  $K_L$  grâce à un spectromètre à deux bras et à des chambres à étincelles.

Cependant la dynamique de la désintégration  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$  pose la limite cinématique suivante sur la masse invariante:

$$0.490 \text{ MeV} < M_{\pi\pi} < 510 \text{ MeV}$$

et requiert que les  $K_L$ ,  $\pi^+$  et  $\pi^-$  soient coplanaires. Puisqu'il y a trois particules finales

dans les désintégrations  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ , elles se distinguent par un grand spectre de la masse invariante  $M_{\pi\pi}$  et une configuration non-planaire. À noter que la configuration de l'expérience de 'Cronin et Fitch' favorise la détection de  $\pi^+ \pi^-$  coplanaires.

On mesure alors expérimentalement

$$|\eta_{+-}| = \frac{\text{Ampl}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)}{\text{Ampl}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} \simeq (2.27 \pm 0.02) \times 10^{-3}$$

(Des effets similaires sont observés dans le processus  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ ; on peut aussi définir  $\eta_{00}$ ).

En général,  $\eta_{+-}$  et  $\eta_{00}$  dépendent des amplitudes  $A_0 = \text{Ampl}(I = 0)$  et  $A_2 = \text{Ampl}(I = 2)$  associées aux états finaux de pions avec  $I = 0$  et  $I = 2$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \varepsilon + \varepsilon' \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}} \\ \eta_{00} &= \varepsilon - 2\varepsilon' \equiv |\eta_{00}| e^{i\phi_{00}} \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon' = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im } A_2}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}.$$

Si la règle de  $\Delta I = \frac{1}{2}$  tient,  $A_2 = 0$ ,  $|\eta_{+-}| = |\eta_{00}|$ ,  $\phi_{+-} = \phi_{00}$  et on observe expérimentalement

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= (2.274 \pm 0.027) \times 10^{-3} & \phi_{+-} &= 44.6 \pm 1.2^\circ \\ \eta_{00} &= (2.29 \pm 0.04) \times 10^{-3} & \phi_{00} &= 55 \pm 6^\circ \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \leq 0.02.$$

### Remarque 8.6

*La violation  $\mathcal{CP}$  pourrait être bientôt observée dans des systèmes de  $B^0$  (voir référence sur expérience BaBar au SLAC). Pour le moment, les seules évidences expérimentales viennent des systèmes  $K^0 - \bar{K}^0$ .*



## Implications cosmologiques

La violation  $\mathcal{CP}$  a des implications cosmologiques. Elle peut servir à expliquer le rapport d'abondance de baryons versus abondance de photons observé dans l'Univers. Celui-ci est d'environ

$$\frac{N_b}{N_\gamma} = 10^{-9 \pm 1}$$

Mais dans les premiers instants suivant le Big Bang (à un temps correspondant à la masse du proton), il aurait dû y avoir équilibre entre baryons, antibaryons et photons puisque le processus dominant à ce moment est la création/annihilation de paires particules-antiparticules et donc

$$N_b - N_{\bar{b}} = N_\gamma$$



À mesure que l'Univers *refroidit*, les paires baryon-antibaryon peuvent continuer de s'annihiler mais leur création s'arrête, les photons n'ayant plus suffisamment d'énergie pour les produire. Il reste des baryons dans une proportion

$$\frac{N_b}{N_\gamma} = 10^{-18}.$$

Deux problèmes se posent alors:

- ▶ L'abondance de baryons est beaucoup plus grande que prévue.
- ▶ L'Univers semble dominé par la matière (aucun rayon cosmique formé d'antimatière donc pas d'antimatière dans notre galaxie et aucun signe de productions de rayons-X pouvant provenir de la rencontre d'une galaxie avec une anti-galaxie).

Ce déséquilibre matière-antimatière peut toutefois s'expliquer par une violation  $\mathcal{CP}$  puisque celle-ci implique que la matière et l'antimatière ont des interactions différentes.

L'origine de la violation  $\mathcal{CP}$  reste néanmoins un mystère.

## 8.10 Problèmes

### 1. Largeur de désintégration du $Z^0$

On observe une largeur totale de désintégration du  $Z^0$  de  $2490 \pm 7$  MeV qui provient des largeurs partielles de désintégration suivantes

paIRES lepton-antilepton chargés	84 MeV
hadronique totale	$1741 \pm 6$ MeV

Par ailleurs, plusieurs modes de désintégration contribuent à cette quantité et le modèle standard prédit des largeurs partielles

chaque paire de quark-antiquark $Q = \frac{2}{3}$	296 MeV
chaque paire de quark-antiquark $Q = -\frac{1}{3}$	382 MeV
chaque paire de neutrino-antineutrino	166 MeV

Vérifier que les prédictions et les observations peuvent être en accord. En supposant que les prédictions du modèle standard sont correctes, que peut-on en conclure?

### 2. Courants chargés ou neutres

Classifier ces réactions suivant qu'elles ont des courants chargés ou neutres:

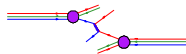
- (a)  $\nu_\mu + p \rightarrow \nu_\mu + p$
- (b)  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$
- (c)  $e^+ + e^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$
- (d)  $e^- + p \rightarrow \nu_e + n + \pi^+ + \pi^-$

### 3. Matrice CKM

Au Fermilab et au LEP2, des bosons  $W$  peuvent être produits. En utilisant la matrice CKM, calculer les rapports de branchement du  $W^+$  en paires quark-antiquark et en lepton-antilepton, i.e.  $u\bar{d}, c\bar{s}, \dots, e^+\nu_e, \dots$  etc. La somme des rapports de branchement devrait être 1. (Rappel: le rapports de branchement  $W \rightarrow hadrons$  sont d'environ 67%).

### 4. L'interaction faible

L'interaction faible est rendue possible par l'échange de  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Étant donné que la masse du  $W^\pm$  est de 80 GeV estimez la portée de l'interaction faible et comparez-la aux dimensions typique d'un nucléon. Décrivez les conséquences que cela implique sur la désintégration  $\beta$  d'un nucléon.



# 9 INTERACTIONS FORTES (QCD)

Le modèle des quarks basé sur le groupe de symétrie interne  $SU(3)$  permet une classification correcte des hadrons observés (voir chapitre 6). Les quarks ne sont alors que des abstractions mathématiques et non des particules physiques. L'existence des quarks peut être démontrée à l'aide d'expériences utilisant des leptons pour sonder l'intérieur du nucléon. Plus la longueur d'onde du lepton est petite (plus son énergie est grande), plus il est possible de voir des détails fins (structure interne du nucléon). Les réactions qui nous intéressent sont inélastiques en ce sens que les particules initiales et finales ne sont pas les mêmes. Le diamètre du proton est d'environ  $10^{-15}$  m, ce qui veut dire que pour en connaître la structure interne la sonde doit avoir une énergie de l'ordre du GeV.

## 9.1 Diffusion $e - N$

Lorsqu'un électron ( $e^-$ ) est diffusé par un nucléon, c'est la force électromagnétique qui est la plus importante. Au cours de ce processus (appelé électro-production), c'est le diagramme impliquant l'échange d'un seul photon virtuel ( $\gamma$ ) qui domine (voir figure 9.1). Il faut noter que des processus mettant en cause l'échange de plusieurs photons peuvent devenir importants lorsque l'énergie de la particule incidente est très grande.

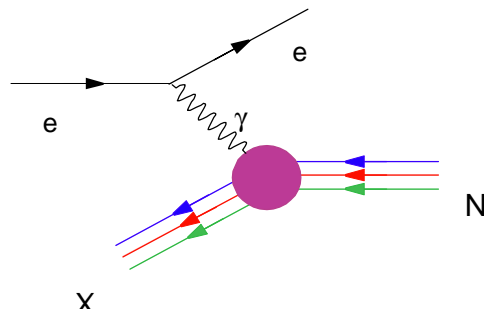


Figure 9.1 Diagramme impliquant l'échange d'un photon virtuel ( $\gamma$ ).

En laboratoire, on peut mesurer la section efficace de tels processus. Les variables en

cause sont l'énergie perdue par le lepton et son angle de diffusion. La première quantité,  $\nu$ , est définie par

$$\nu = E_i - E_f, \quad (9.1)$$

où  $E_i$  est l'énergie initiale du lepton et  $E_f$  son énergie finale. L'angle de diffusion  $\theta$  est relié à l'impulsion  $q^2$  portée par le photon virtuel,

$$q^2 = 2E_i E_f (1 - \cos \theta). \quad (9.2)$$

L'électrodynamique quantique (QED) décrit les interactions lepton-photon dans lesquelles le lepton est une particule ponctuelle (particule de Dirac). L'interaction photon-nucléon est toutefois plus complexe puisque ce dernier possède une structure interne. Pour caractériser l'évolution de la structure du nucléon durant l'interaction, on utilise des fonctions de structure dont la forme doit être déterminée expérimentalement. La section efficace différentielle pour la diffusion inélastique électron-proton est

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{q^4} \frac{E_f}{E_i M_p} \left[ \frac{M_p}{\nu} F_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2F_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (9.3)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont les fonctions de structure,  $M_p$  la masse du proton et  $\alpha_{em}$  la constante de structure fine (constante de couplage électromagnétique).

## 9.2 Invariance d'échelle

Notons tout d'abord que les fonctions de structure n'ont pas de dimension; ce sont simplement des nombres. Les sections efficaces de processus sont toujours fonction de la section efficace de Rutherford (voir équation (7.33)). Si les fonctions de structure dépendent des quantités  $\nu$  et  $q^2$ , alors il doit exister d'autres quantités pour annuler leur dimension de manière à ce que les fonctions de structure soient des nombres. Pour un processus de diffusion à basse énergie ( $q^2 = 2\nu M_N$ ), le photon voit le nucléon ( $N$ ) comme un objet étendu (non-composite) et la fonction de structure décrit essentiellement la distribution spatiale de sa charge électrique,

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{q^4} F\left(\frac{q^2}{M_N^2}\right). \quad (9.4)$$

On dit alors que la masse du nucléon ( $M_N$ ) fixe l'échelle de la réaction à partir de laquelle l'influence de l'impulsion photonique ( $q^2$ ) est mesurée.

Pour des processus inélastiques (hautes énergies:  $q^2, \nu \rightarrow \infty$ ), la longueur d'onde du photon est tellement petite que l'existence du nucléon au complet n'est pas importante. En effet, le photon n'interagit alors qu'avec une faible partie du centre de diffusion. Il n'existe alors aucune raison valable d'utiliser  $M_N$  comme échelle énergétique de la réaction. L'idée est alors la suivante: si les fonctions de structure reflètent le fait que la section efficace dépend de la structure du nucléon vu par un photon pour lequel  $\nu$  et  $q^2$  sont très grands, et si il n'existe pas d'échelle de masse pour annuler la dimension de ces quantités, alors les fonctions de structure doivent dépendre d'un paramètre sans dimension qui est un rapport entre  $\nu$  et  $q^2$ . Appelons cette quantité  $x$  et définissons-la de manière à ce qu'elle soit un invariant de Lorentz:

$$x = \frac{q^2}{2\nu M_N} \quad (0 < x < 1). \quad (9.5)$$

L'hypothèse d'invariance d'échelle proposé par J.D. Bjorken consiste à dire que pour  $\nu, q^2 \rightarrow \infty$ ,  $F_1$  et  $F_2$  sont fonction de  $x$  et non des quantités  $q^2$  et  $\nu$  séparément:

$$F_{1,2}^{eN}(q^2, \nu) \xrightarrow{q^2, \nu \rightarrow \infty} F_{1,2}^{eN}(x). \quad (9.6)$$

Puisqu'à très haute énergie, la structure ne dépend d'aucune échelle de masse, d'énergie ou de grandeur caractéristique, elle est assimilable à une structure ponctuelle.



### Remarque 9.1

*Si une particule ponctuelle n'a aucune structure ou échelle de grandeur ou de masse, cela implique qu'une sonde verra toujours cette particule de la même façon quelque soit l'énergie ou la profondeur à laquelle on sonde*

$$F_{1,2}^{eN}(x, q^2) \text{ est indépendant de } q^2.$$

## 9.3 Modèle des partons

C'est R.P. Feynman qui a eu l'idée de décrire le nucléon comme un objet constitué d'éléments composites appelés partons. La nature de ces entités doit être déterminée en laboratoire. Des expériences ont démontré que les partons sont étroitement reliés aux quarks. Cependant, il serait faux de prétendre que seulement trois quarks peuvent décrire la composition du nucléon. Par exemple, en plus des quarks de valence composant le proton, il peut exister une "mer" de quarks constituée de paires quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ) dont l'existence est permise par le principe d'incertitude de Heisenberg. Notons que cette "mer" de particules ne peut pas avoir d'influence sur les nombres quantiques du nucléon puisque ceux-ci sont déterminés par les quarks de valence. On retrouve aussi dans le nucléon les particules responsables des forces inter-quark, les gluons.

Dans le modèle original des partons, les constituants du nucléon sont des particules ponctuelles, sans masse et libres. Considérons donc la diffusion d'un photon de très haute énergie par une charge ponctuelle; on peut alors se référer au traitement du chapitre 7. La variable  $x$  représente la fraction de l'impulsion totale du nucléon portée par le parton interagissant avec le photon. Par conséquent, les fonctions de structure caractérisent la distribution de l'impulsion entre les partons du nucléon.

La figure 9.2 illustre la dynamique des partons dans une collision électron-nucléon ( $eN$ ). Le photon virtuel d'impulsion  $q$  entre en collision avec un parton qui porte une fraction  $x$  de l'impulsion  $P$  du nucléon. Puisque les partons n'ont pas de masse, l'impulsion doit obéir à la relation

$$(xP + q)^2 = 0 \quad (9.7)$$

d'où

$$x^2 P^2 + q^2 + 2xP \cdot q = 0$$

Mais à très haute énergie  $x^2 P^2 = x^2 M^2 \ll q^2$  et il en découle que

$$x = -\frac{q^2}{2P \cdot q} = -\frac{q^2}{2M\nu} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 1$$

puisque dans le référentiel du laboratoire  $P \cdot q = M\nu$ . La variable d'échelle  $x$  définie par Bjorken correspond donc à la fraction d'impulsion portée par le parton une définition, il faut en convenir, beaucoup plus intuitive.

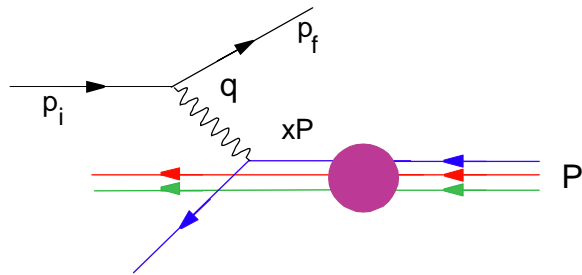


Figure 9.2 Dynamique d'une collision  $eN$  dans le cadre du modèle des partons. Le photon virtuel d'impulsion  $q$  entre en collision avec un parton qui porte une fraction  $x$  de l'impulsion  $P$  du nucléon.

La figure 9.3 montre un exemple de fonction de structure. On remarque qu'une grande partie des collisions se produisent avec les partons qui transportent une faible fraction de l'impulsion totale. Pour sa part, la figure 9.4 montre une courbe qui supporte l'hypothèse d'invariance d'échelle. Rappelons que les fonctions de structure d'un proton ponctuel (particule de Dirac) sont

$$G_E(q^2) = 1 \quad G_M(q^2) = 1. \quad (9.8)$$

Il y a donc invariance d'échelle (invariance sous les transformations du type  $q^2 \rightarrow kq^2$ ) évidente dans le cas d'une particule ponctuelle. L'invariance d'échelle à haute énergie dans le cas d'une collision inélastique lepton-nucléon rend plausible l'existence de particules ponctuelles (les partons) à l'intérieur du nucléon.

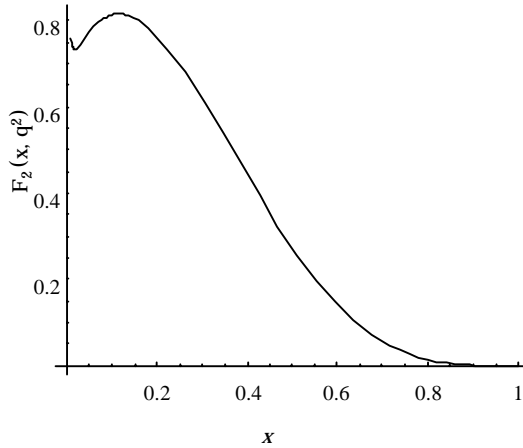


Figure 9.3 La dépendance de fonction de structure  $F_2(x, q^2)$  sur la variable  $x$  à  $q = 2$  GeV.

Si les partons avaient un spin nul ( $S = 0$ ), on devrait trouver expérimentalement

$$F_1(x, Q^2) = 0, \quad (9.9)$$

alors que pour un spin  $\frac{1}{2}$ , la relation de Callan-Gross devrait être satisfaite,

$$2xF_1(x) = F_2(x). \quad (9.10)$$

Il a été démontré en laboratoire que le rapport  $\frac{2xF_1}{F_2}$  est très près de l'unité. Il en découle que les partons chargés possèdent bien un spin de  $\frac{1}{2}$  (comme les quarks).

De façon générale, on peut dire que les fonctions de structure caractérisent la distribution de charge dans le nucléon. À basse énergie (cas non relativiste), il est acceptable de considérer la charge du proton comme étant distribuée uniformément à travers le volume de ce dernier. À haute énergie, il faut considérer que l'impulsion du nucléon est distribuée parmi un ensemble de partons. Disons que le  $i^{\text{ème}}$  parton, possédant une charge  $Q_i$ , a une probabilité  $f_i(x)$  de transporter une fraction  $x$  de l'impulsion totale. Alors, les

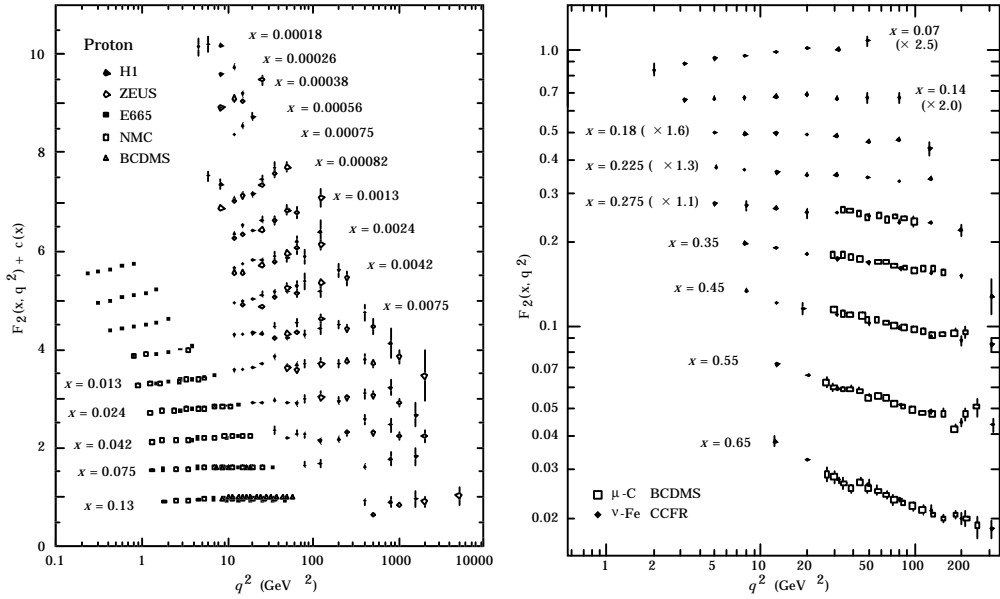


Figure 9.4 La dépendance de la fonction de structure du proton  $F_2(x, q^2)$  sur la variable d'échelle  $q^2$  (résultats expérimentaux de diverses sources). En première approximation, il y a invariance d'échelle, i.e.  $F_2(x, q^2)$  est pratiquement constant pour une grande région de  $q^2$ .



fonctions de structure peuvent s'écrire:

$$F_1^{eN}(x) = \sum_{i=\text{partons}} f_i(x) Q_i^2 \quad (9.11)$$

$$F_2^{eN}(x) = 2x \sum_{i=\text{partons}} f_i(x) Q_i^2, \quad (9.12)$$

d'où il s'en suit que la charge totale du nucléon satisfait la relation

$$\int_0^1 \frac{F_2(x)}{x} dx = \sum_i Q_i^2. \quad (9.13)$$

## 9.4 Liberté asymptotique et confinement

La théorie qui décrit les interactions fortes dans le cadre du Modèle Standard est la chromodynamique quantique (QCD). Même si cette théorie n'a pas été aussi testée que QED, elle est en accord avec plusieurs résultats expérimentaux et n'a jamais été contredite. Une des similarités entre la QED et la QCD est l'existence, dans les deux cas, de bosons d'interaction de spin 1 couplés avec les charges conservées de la théorie. Ces deux théories sont des théories de jauge en ce sens qu'elles sont invariantes sous un certain type de transformations: des transformations de jauge locale. Pour QED, il existe un seul type de boson de jauge (le photon) alors qu'il en existe huit pour la QCD (les gluons). Les gluons n'ont pas de charge électrique et sont couplés à une charge de couleur au lieu de l'être à la charge électrique comme c'est le cas pour le photon. L'interaction forte est la même pour toutes les saveurs de quarks ( $u, d, \dots$ ) puisque ces derniers existent dans les mêmes trois états de couleur ( $r, g, b$ ) qui possèdent chacun la même charge de couleur. Conséquences: symétrie d'isospin (puisque les quarks  $u$  et  $d$  ont approximativement la même masse), égalité des potentiels dans le charmonium (état lié  $c\bar{c}$ ) et le bottonium (état lié  $b\bar{b}$ ).

Puisque les gluons n'ont pas de masse, l'interaction forte a une portée infinie. Cela n'implique cependant pas que la force entre les hadrons ait une grande portée. En effet, ces derniers ont une couleur résultante nulle. La force entre les hadrons sans couleur est le résidu de la force entre les quarks et devient nulle lorsque la distance de séparation est grande. Une différence très importante entre la QED et la QCD est que dans le photon ne possède pas de charge électrique alors que les gluons possèdent une charge de couleur. Par conséquent, les gluons peuvent être couplés à d'autres gluons conférant ainsi à la QCD un caractère non linéaire (voir figure 9.5).

L'interaction gluon-gluon n'a pas d'analogue en QED et c'est ce qui explique des propriétés telles le confinement et la liberté asymptotique en QCD. Le confinement est une hypothèse voulant qu'on ne puisse pas observer d'états colorés dans la Nature. Les gluons et les quarks ne peuvent pas exister seuls. La liberté asymptotique implique que l'interaction forte devienne de plus en plus petite à courte distance (haute énergie). Par exemple, plus on tente d'éloigner deux quarks, plus la force entre ces deux particules est importante. À très courte distance, les quarks peuvent être considérés comme étant approximativement libres. Pour des distances plus petites que 0.1 fm, ce sont les diagrammes d'ordres inférieures qui dominent. Par exemple, la diffusion quark-quark peut

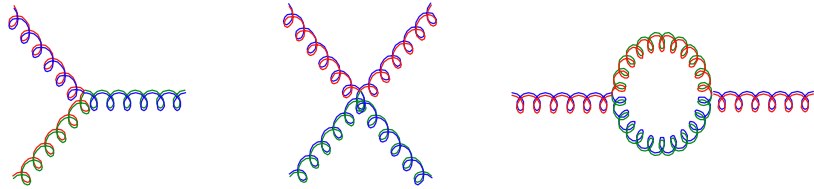


Figure 9.5 Les gluons peuvent être couplés à d'autres gluons conférant ainsi à la QCD un caractère non linéaire. Cette propriété est responsable de la liberté asymptotique.

être approchée par l'échange d'un seul gluon (voir figure 9.6). À basse énergie, les diagrammes d'ordres supérieures deviennent importants et il est impossible d'obtenir des résultats à l'aide de l'approche perturbative.

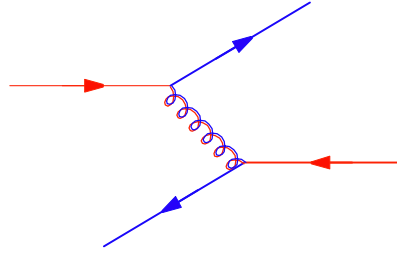


Figure 9.6 La diffusion quark-quark est dominée par le processus d'échange d'un seul gluon.

Pour illustrer le confinement et la liberté asymptotique, utilisons l'exemple non relativiste du potentiel statique entre deux quarks ( $q\bar{q}$ ) lourds.

Pour une faible distance de séparation ( $r < 0.1$  fm), l'interaction est dominée par le processus impliquant l'échange d'un seul gluon. Ainsi, on s'attend à ce que le potentiel soit de type Coulombien (comme pour les processus dominés par l'échange d'un seul photon en QED):

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \quad (r < 0.1 \text{ fm}), \quad (9.14)$$

où  $\alpha_s$  est la constante de couplage forte (sans dimension). À cause de la liberté asymptotique, la force de l'interaction ( $\alpha_s$ ) décroît à mesure que  $r$  augmente.

Pour  $r > 0.1$  fm, la constante de couplage augmente plus rapidement et le potentiel devient approximativement linéaire:

$$V(r) \simeq \lambda r \quad (r > 0.1 \text{ fm}), \quad (9.15)$$

où  $\lambda$  est une constante de l'ordre de  $1 \text{ GeV fm}^{-1}$  ne pouvant pas être calculée avec précision. Il s'agit d'un potentiel qui possède la propriété de confinement.

Il est possible de démontrer que la constante de couplage forte ( $\alpha_s$ ) est donnée avec une bonne précision par la relation

$$\alpha_s = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(\frac{q^2}{\Lambda^2})} \quad (9.16)$$

pour  $q^2 \gg \Lambda^2$ , où  $N_f$  est le nombre de saveurs ( $u, d, \dots$ ) remplissant la condition  $4m_q^2 < q^2$  et  $\Lambda$  est un paramètre d'échelle trouvé expérimentalement:

$$\Lambda = 200 \pm 100 \text{ MeV}. \quad (9.17)$$

La figure 9.7 montre l'allure de la fonction (9.16).

Les processus au cours desquels une particule est convertie durant un bref instant en deux ou plusieurs particules sont ce qu'on appelle des fluctuations quantiques. La figure 9.8 montre des fluctuations quantiques possibles en QED (voir aussi figure 9.8). Dans ce cas, il est possible de visualiser l'électron comme émettant et absorbant de façon continue non-seulement des photons mais aussi des paires électron-positron ( $e^+e^-$ ).

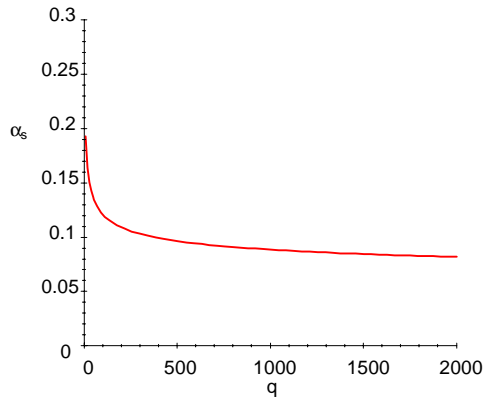


Figure 9.7 La constante de couplage efficace pour les interactions fortes.

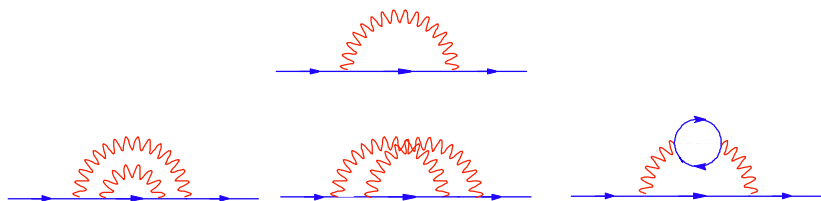


Figure 9.8 Exemples de fluctuations quantiques possibles en QED.

Ces contributions entraînent des conséquences faibles mais mesurables appelées polarisation du vide. Il y a en effet création d'un milieu diélectrique (composé de paires  $e^+e^-$ ) polarisé autour de l'électron (voir figure 9.9). Ce milieu diélectrique génère un effet d'écran autour de la charge. Plus on s'éloigne de l'électron, plus la charge perçue est petite. Le potentiel efficace prend la forme

$$\phi_{\text{eff}}(r) = \frac{\alpha_{\text{eff}}(r)}{r} \quad (9.18)$$

où  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_{em} = \frac{1}{137}$  pour  $r \gg \lambda_c$  ( $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.9 \times 10^{-13} m$ ).

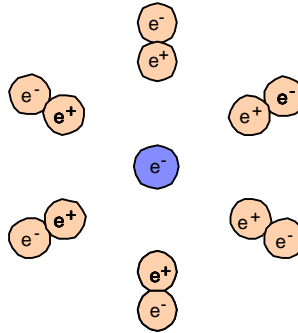


Figure 9.9 Polarisation du vide en QED.

Il y a aussi des fluctuations quantiques en QCD qui mènent à une variation de la force d'interaction en fonction de la distance. La création de paires quark-antiquark autour d'un quark nu mène à un effet d'écran similaire à celui qu'on retrouve en QED. S'il s'agissait des seules fluctuations des quarks, on observerait une diminution de la constante de couplage avec la distance. Cependant, il existe aussi des contributions amenées par l'interaction des gluons entre eux. La figure 9.10 illustre une partie des contributions additionnelles au couplage quark-gluon. Des calculs détaillés montrent que ces contributions mènent à un effet d'anti-écran causant une augmentation de la force d'interaction à grande distance. En fait, les contributions des interactions gluon-gluon sont plus importantes que celles causant un effet d'écran. L'effet total de ces deux effets est la liberté asymptotique.

## 9.5 Annihilation $e^+e^-$

Considérons les réactions de type



lorsque l'énergie dans le centre de masse ( $E_{CM} = 2E_e$ ) est entre 15 et 40 GeV. Ce type de réaction permet de mettre en évidence l'existence de la couleur et des gluons.

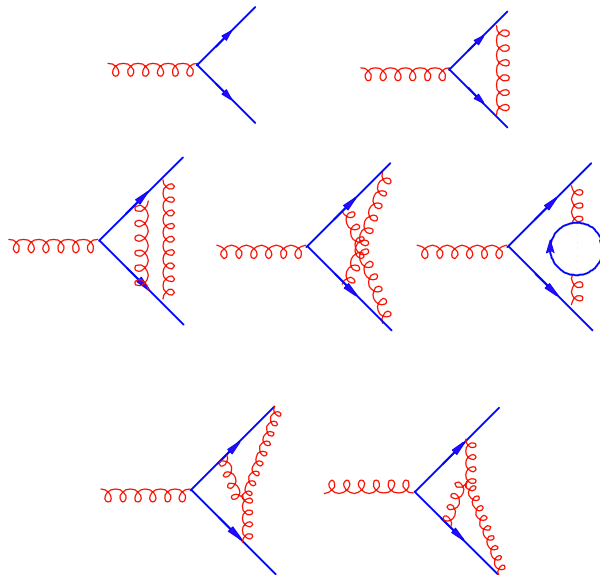


Figure 9.10 Le premier diagramme est la contribution originale au couplage. Le second est une des corrections d'ordre  $O(\alpha_s)$  alors que les autres diagrammes contribuent tous à l'ordre  $O(\alpha_s^2)$ . En additionnant toutes les corrections d'ordres supérieurs, on est en mesure de calculer le couplage efficace quark-gluon (voir éq.(9.16)).

## Événement à deux jets

Le processus dominant de ce type de réaction est représenté à la figure 9.11. C'est ce qu'on appelle un événement à deux jets. Ce processus peut être décrit en deux étapes: (1) le processus électromagnétique

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}, \quad (9.20)$$

qui mène à la production d'une paire quark-antiquark, (2) la fragmentation, un processus impliquant l'interaction forte convertissant la paire  $q\bar{q}$  hautement énergétique en deux jets de hadrons émis dans des directions opposées dans le référentiel du centre de masse (conservation de l'impulsion).

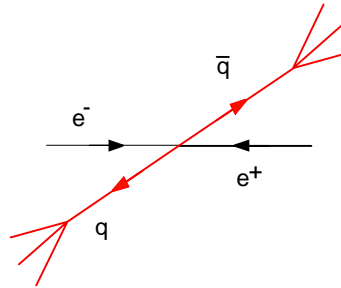


Figure 9.11 Événement à deux jets.

Le processus de fragmentation est très compliqué et la composition des jets (nombre et type de particules, impulsions) varie d'un événement à l'autre. Cependant, la direction d'un jet, qui est déterminée par la conservation de l'impulsion,

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad (9.21)$$

reflète la direction des quarks parents  $q$  et  $\bar{q}$ . La raison est qu'à courte distance l'interaction entre les quarks est très faible (liberté asymptotique). En fait, le couplage fort devient appréciable seulement lorsque les particules  $q$  et  $\bar{q}$  sont séparées d'une distance de l'ordre de 1 fm, ce qui correspond à une énergie de 200 MeV. Il s'agit d'une échelle d'énergie beaucoup plus petite que l'énergie des quarks produits initialement. Les jets pointent donc exactement dans la direction des quarks produits. Comme dans le cas de la diffusion  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ , on trouve expérimentalement que la distribution angulaire des jets a la forme

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \propto (1 + \cos^2\theta), \quad (9.22)$$

ce qui reflète bien la direction des quarks lors de leur production.

## Événement à trois jets

L'événement dominant pour le processus d'annihilation  $e^+e^-$  en hadrons est la formation de deux jets émis dans des directions opposées (référentiel du centre de masse). Lors de la fragmentation, il est possible qu'un gluon de haute énergie soit émis à un angle quelconque par le quark ou l'antiquark. Il y a alors formation d'un événement à trois jets. La détection de ce type d'événement (voir figure 9.12) fournit un bon indice de l'existence du gluon de spin 1 prévu par la QCD. La probabilité d'émission d'un gluon est déterminée par la constante de couplage forte,  $\alpha_s$ . La fraction d'événements à trois jets observée peut être utilisée pour déterminer cette quantité. Pour  $E_{CM} = 30 - 40 \text{ GeV}$ , on trouve expérimentalement que

$$\alpha_s = 0.15 \pm 0.03. \quad (9.23)$$

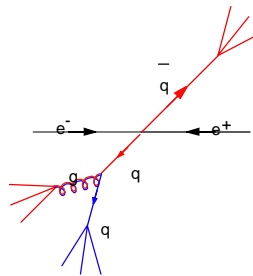


Figure 9.12 Événement à trois jets.

## Section efficace totale

La section efficace totale pour le processus  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  (production de muons) est

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}. \quad (9.24)$$

La section efficace totale associée à l'annihilation  $e^+e^-$  en hadrons est souvent mesurée en fonction du rapport

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}, \quad (9.25)$$

dont les valeurs expérimentales sont présentées à la figure 9.13.

Pour comprendre le résultat de la figure 9.13, supposons qu'il existe cinq saveurs de quarks en  $N_c$  couleurs. Puisque les différents états de couleur possèdent la même charge électrique, ils peuvent être produits avec la même probabilité dans le cadre du processus de la figure 9.13. Ainsi, la probabilité de production d'une paire de quarks  $u, d, s, c$  ou



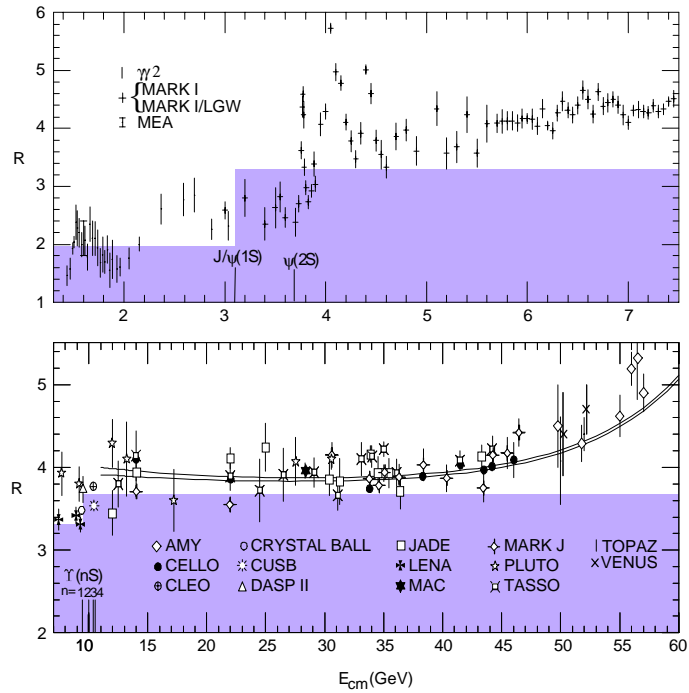


Figure 9.13 Rapport  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ : La prédiction théorique donne d'abord  $R = 2$  (quarks  $u, d$  et  $s$ ), puis  $R = \frac{10}{3}$  (quarks  $u, d, s$  et  $c$ ) et  $R = \frac{11}{3}$  (quarks  $u, d, s, c$  et  $b$ ) après le seuil de production du quark charmé et du quark bottom respectivement. La partie ombrée correspond aux plateaux successifs de  $R$ . Des corrections d'ordre  $\alpha_s$  rapprochent les prédictions théoriques des résultats expérimentaux (voir éq. (9.28)).

$b$  est proportionnelle à  $N_c$ :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = N_c e_a^2 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-), \quad (9.26)$$

où  $e_a$  est la charge fractionnaire du quark  $a$  ( $Q_a = ee_a$ ). Pour le processus à deux jets, on trouve

$$R = R_0 \equiv N_c(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2 + e_b^2) = \frac{11N_c}{9}. \quad (9.27)$$

En effet, cinq saveurs de quarks peuvent être produites aux énergies en cause ici (le quark  $t$  est trop lourd pour être produit à ces énergies). En incluant les processus à trois jets, une correction s'ajoute:

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right), \quad (9.28)$$

ce qui est en accord avec les prédictions de la figure 9.13.

## 9.6 Diffusion $\nu - N$

Dans le cadre de la diffusion inélastique neutrino (antineutrino)-nucléon, c'est le boson d'interaction faible  $W^\pm$  qui sonde la charge faible du nucléon (voir figure 9.14). Ce type d'interaction permet de distinguer les partons des antipartons et ce puisque, dans le cadre des interactions faibles, les particules d'hélicités différentes sont affectées différemment. Dans la limite relativiste (on peut alors négliger la masse des particules), les partons et antipartons ont des hélicités différentes de sorte qu'ils interagissent différemment avec les bosons  $W^\pm$ . De plus, puisque les  $W^\pm$  sont chargés électriquement, le parton cible doit être en mesure d'absorber la charge. En fait, les sondes faibles sont plus sélectives et permettent une description plus détaillée de l'intérieur de nucléon. Cependant, il faut noter que la réalisation d'expériences impliquant des neutrinos, à cause de la nature même de ces particules, est beaucoup plus difficile que celles impliquant des photons.

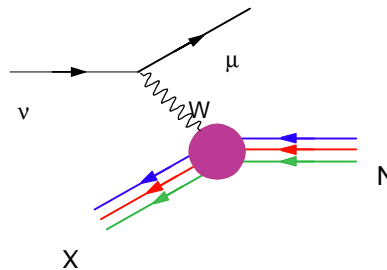


Figure 9.14 Diffusion inélastique neutrino (antineutrino)-nucléon par l'échange d'un boson d'interaction faible  $W$ .

## Section efficace

La section efficace différentielle pour la diffusion (anti)neutrino-nucléon a la forme

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{E_\mu}{E_{\nu(\bar{\nu})}} \left\{ 2F_1^W(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta_\mu}{2} + F_2^W(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta_\mu}{2} \pm F_3^W(q^2, \nu) \frac{E_\mu + E_{\nu(\bar{\nu})}}{M_N} \sin^2 \frac{\theta_\mu}{2} \right\} \quad (9.29)$$

où  $G_F$  est la constante de Fermi,  $E_i$  l'énergie de la particule  $i$  et  $\theta_\mu$  l'angle de diffusion du muon ( $\mu$ ) final. Puisque l'interaction faible ne conserve pas la parité, cette symétrie ne peut pas être utilisée pour simplifier le problème. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'introduire une troisième fonction de structure,  $F_3^W$ . Le signe devant cette fonction dépend du fait que la diffusion implique un neutrino ou un antineutrino. Il s'agit d'une manifestation du fait que les interactions faibles distinguent la matière de l'antimatière. Notez que les quantités  $q^2$  et  $\nu$  n'entrent dans l'expression (9.29) que par l'intermédiaire des fonctions de structure.

## Invariance d'échelle

L'hypothèse d'invariance d'échelle à haute énergie présentée pour l'interaction électromagnétique est aussi valide pour l'interaction faible:

$$F_{1,2,3}^W(q^2, \nu) \xrightarrow{q^2, \nu \rightarrow \infty} F_{1,2,3}^W(x), \quad (9.30)$$

où  $x$  est définie comme en (9.5). Les fonctions de structure peuvent être mesurées à partir de l'expérience et leur forme est sensiblement la même que dans le cas électromagnétique. Cependant, puisque la mesure des paramètres relatifs à un faisceau de neutrinos est moins précise, les incertitudes expérimentales sont beaucoup plus importantes.

L'expression (9.29) ne dépendant des quantités  $q^2$  et  $\nu$  qu'à travers les fonctions de structure, il est possible (en utilisant l'hypothèse d'invariance d'échelle) d'éliminer cette dépendance. La section efficace totale devient alors

$$\sigma^{\nu(\bar{\nu})N} = \int \frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} dq^2 d\nu \propto \frac{G_F^2 M E_{\nu(\bar{\nu})}}{\pi}. \quad (9.31)$$

En se basant sur l'invariance d'échelle, il est donc possible de prédire que la section efficace (9.31) est une fonction linéaire de l'énergie du neutrino ou de l'antineutrino. À cause du signe devant  $F_3^W$ , la pente de cette droite sera différente pour la particule et l'antiparticule (voir figure 9.15) par un facteur d'environ 3. Pour en comprendre la raison, rappelons que puisque sa masse est nulle, le neutrino ne peut exister que dans un état d'hélicité gauche (et les antineutrinos dans un état d'hélicité droite). De plus, négligeant leur masse (limite relativiste), les partons (de spin  $\frac{1}{2}$ ) sont alors d'hélicité gauche. Lors d'une collision neutrino-parton, les spins s'additionnent pour donner 0. Il n'y a alors aucune restriction sur l'angle de diffusion de la particule finale (le muon). Cependant, lorsque le parton cible est couplé avec un antineutrino, le moment angulaire résultant est non-nul, ce qui introduit une restriction sur les angles de diffusion possibles de la particule finale. La section efficace parton-antineutrino est donc réduite par rapport

à celle impliquant un neutrino et un parton puisque l'intégration sur  $q^2$  effectuée pour obtenir la section efficace totale équivaut à une intégration sur l'angle de diffusion (voir (9.2)). Il est important de se rappeler que dans le nucléon il y a plus de partons que d'antipartons.

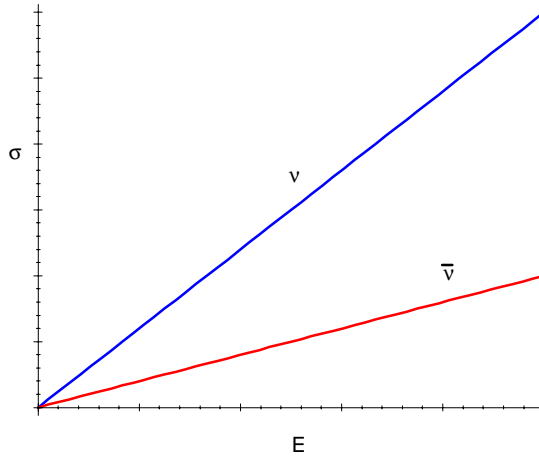


Figure 9.15

## 9.7 Modèle des quarks-partons et fonctions de structure

Comparons maintenant la structure interne du nucléon vue par les sondes électromagnétiques ( $\gamma$ ) et par les sondes faibles ( $W$ ). Pour ce faire, supposons que les partons soient des quarks.

Dans le modèle des quarks à quatre saveurs, on retrouve les degrés de liberté:

$$u(Q = \frac{2}{3}), \quad d(Q = -\frac{1}{3}), \quad s(Q = -\frac{1}{3}), \quad c(Q = \frac{2}{3}). \quad (9.32)$$

En tenant compte de la présence de quarks et d'antiquarks, on peut écrire la fonction de structure du proton comme

$$F_1^{ep}(x) = \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 (f_u(x) + f_{\bar{u}}(x)) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (f_d(x) + f_{\bar{d}}(x)) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (f_s(x) + f_{\bar{s}}(x)) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (f_c(x) + f_{\bar{c}}(x)) \right]. \quad (9.33)$$

La fonction de structure  $F_2^{ep}$  est alors trouvée en appliquant la relation de Callan-Gross. Les fonctions de structure du neutron sont pour leur part obtenues en faisant la modification  $f_u(x) \longleftrightarrow f_d(x)$ . Les distributions de partons sont illustrées à la figure 9.16

La fraction d'impulsion totale transportée par une variété de quarks est obtenue par

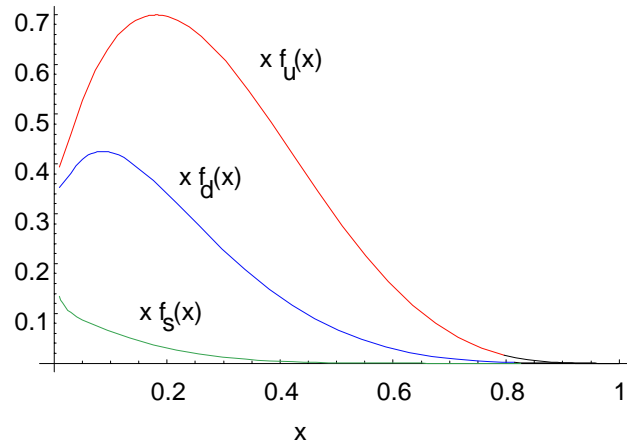


Figure 9.16 Distributions de partons dans le proton en fonctions de  $x$  pour  $q = 2$  GeV. Les quarks  $u$  et  $d$  dominent.

intégration sur sa distribution d'impulsion. Par exemple, la fraction d'impulsion totale transportée par les quarks et antiquarks  $u$  et  $\bar{u}$  est

$$P_u = \int_0^1 x(f_u(x) + f_{\bar{u}}(x)) dx. \quad (9.34)$$

Expérimentalement, on trouve:

$$\int F_2^{ep}(x) = \left(\frac{4}{9}P_u + \frac{1}{9}P_d + \frac{1}{9}P_s + \frac{4}{9}P_c\right) = 0.18 \quad (9.35)$$

$$\int F_2^{en}(x) = \left(\frac{1}{9}P_u + \frac{4}{9}P_d + \frac{1}{9}P_s + \frac{4}{9}P_c\right) = 0.18. \quad (9.36)$$

Négligeant l'impulsion transportée par les quarks  $s, \bar{s}$  et  $c, \bar{c}$ , on a

$$P_u = 0.36, \quad P_d = 0.18. \quad (9.37)$$

Par conséquent, la fraction d'impulsion transportée par le quark  $u$  est deux fois plus grande que celle transportée par le quark  $d$ , ce qui supporte le modèle des quarks dans lequel  $p = (uud)$ . On note aussi que les quarks ne transportent environ que la moitié de l'impulsion totale du proton. Le reste de l'impulsion provient des gluons (sans charge électrique) qui sont invisibles à la sonde électromagnétique qu'est le photon.

Les mesures effectuées à l'aide d'une sonde électromagnétique (le photon) permettent de mettre en évidence l'existence de particules ponctuelles à l'intérieur du nucléon. Cependant, pour séparer la distribution des quarks et des antiquarks, il faut mesurer des sections efficaces de diffusion impliquant des sondes faibles par l'intermédiaire de diffusions inélastiques impliquant des neutrinos et des antineutrinos. Considérons une région ( $x > 0.3$ ) où la présence d'une "mer" quark-antiquark dans le nucléon peut être approximativement négligée. Les seules fonctions à considérer sont alors  $f_u(x)$  et  $f_d(x)$  associées aux quarks de valence. Les fonctions de structure obtenues expérimentalement prennent la forme

$$F_2^{\nu p} = x f_d(x) \quad F_2^{\bar{\nu} p} = x f_u(x). \quad (9.38)$$

Les réactions

$$\nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u \quad (9.39)$$

et

$$\bar{\nu}_\mu + u \rightarrow \mu^+ + d \quad (9.40)$$

sont permises alors que des réactions hypothétiques telles que

$$\nu_\mu + u \rightarrow \mu^+ + d \quad (9.41)$$

et

$$\bar{\nu}_\mu + d \rightarrow \mu^- + u \quad (9.42)$$

ne le sont pas (conservation du nombre muonique). Par conséquent, les neutrinos peuvent être diffusés par des quarks  $d$  mais pas par des quarks  $u$ . Pour leur part, les antineutrinos ne peuvent être diffusés que par des quarks  $u$ . C'est pour cette raison que les neutrinos et les antineutrinos sont des outils idéaux pour séparer la contribution des quarks  $u$  et  $d$ .

Les distributions en quarks du neutron versus celles du proton sont obtenues par l'échange  $f_u \longleftrightarrow f_d$ . Rappelons que les fonctions de structure du neutron sont

$$F_2^{en} = e_u^2 x f_d(x) + e_d^2 x f_u(x) \quad (9.43)$$

et

$$F_2^{\nu n}(x) = x f_u(x) \quad F_2^{\bar{\nu} n}(x) = x f_d(x). \quad (9.44)$$

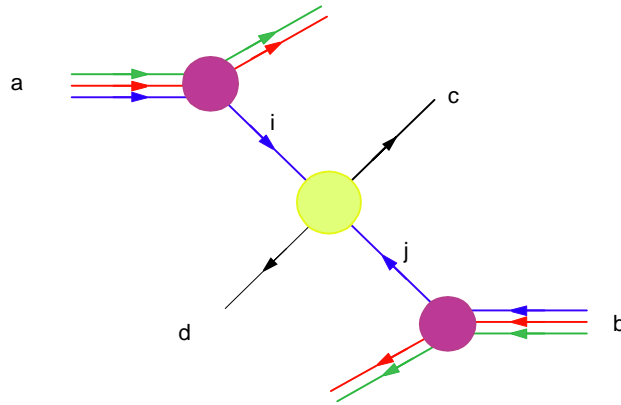


Figure 9.17

On peut alors démontrer que

$$\frac{F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)}{F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)} = \frac{e_u^2 + e_d^2}{2} = \frac{5}{18}. \quad (9.45)$$

Ce résultat, qui a été confirmé expérimentalement, permet d'identifier la charge des partons à celle des quarks.

## 9.8 Collisions hadron-hadron

Le modèle des partons procure une méthode intuitive pour l'analyse des collisions de hadrons. QCD permet de calculer les sections efficaces des processus impliquant des partons (quarks et gluons) qu'il faut ensuite pondérer par la probabilité de trouver les partons dans le hadrons.

Considérons le processus

$$a + b \rightarrow c + X \quad (9.46)$$

où  $a, b$  sont des hadrons,  $c$  un parton et  $X$  représente le reste des produits de la réaction. Dans le cadre du modèle des partons, la collision intervient au niveau d'un sous-processus impliquant des particules fondamentales (voir figure 9.17). Le parton  $i$  sort du hadron  $a$  avec une fraction  $x_a$  de l'impulsion et une probabilité définie par la distribution  $f_i^a(x_a)$ . De la même façon, le parton  $j$  sort du hadron  $b$  avec une fraction  $x_b$  de l'impulsion et une probabilité définie par la distribution  $f_j^b(x_b)$ . Les partons  $i$  et  $j$  interagissent ensuite suivant les interactions définies par le modèle théorique. À cette étape, il est possible de calculer la section efficace  $\hat{\sigma}(i + j \rightarrow c + d)$  du sous-processus

$$i + j \rightarrow c + d. \quad (9.47)$$

La section efficace de la collision est obtenue en faisant la convolution de la section

efficace du sous-processus et des distributions de partons

$$\sigma(a + b \rightarrow c + X) = \sum_{i,j=\text{partons}} \int dx_a f_i^a(x_a) \int dx_b f_j^b(x_b) \hat{\sigma}(i + j \rightarrow c + d) \quad (9.48)$$



### Processus Exemple 9.1

La production de paire de leptons chargés est dominée par l'annihilation de paires de quark-antiquark, échange d'un photon virtuel et finalement production d'une paire de lepton-antilepton chargés

$$q + \bar{q} \rightarrow l^+ + l^-. \quad (9.49)$$

QED mène à la section efficace différentielle suivante

$$\frac{d\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-)}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3q^4} Q_i^2 \delta(q^2 - m^2) \quad (9.50)$$

où  $Q_i$  est la charge du quark  $i$ ,  $q$  est l'impulsion du photon virtuel (ou l'impulsion totale des paires quark-antiquark et lepton-antilepton) et  $m$  est la masse invariante de la paire lepton-antilepton. Pour des hadrons ayant une impulsion  $P_a$  et  $P_b$  respectivement,

$$\begin{aligned} q^2 &= (x_a P_a + x_b P_b)^2 \\ &= (x_a^2 + x_b^2) M^2 + 2x_a x_b P_a \cdot P_b \\ &= (x_a^2 + x_b^2) M^2 + x_a x_b s \\ &\simeq x_a x_b s \end{aligned} \quad (9.51)$$

où  $P_a^2 = P_b^2 = M^2$  et la variable de Mandelstam  $s = 2P_a \cdot P_b \gg M^2$ . Finalement dans le cadre du modèle standard où les quarks apparaissent sous différentes saveurs et  $N_c$  couleurs,

$$\frac{d\sigma(ab \rightarrow l^+l^- X)}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3q^2} \sum_{\substack{i=\text{saveurs,} \\ \text{couleurs}}} \frac{Q_i^2}{N_c} \int dx_a f_i^a(x_a) \int dx_b f_j^b(x_b) \delta(x_a x_b - \frac{m^2}{s}). \quad (9.52)$$

## 9.9 Violation d'échelle

Contrairement aux partons du modèle des partons original, les quarks et les gluons ne sont pas des particules libres. En fait, QCD prédit des violations de l'invariance d'échelle des fonctions de distributions qui sont dues essentiellement aux corrections radiatives et au couplage efficace de QCD qui dépend de  $q^2$ , i.e.  $\alpha_s^2(q^2)$ . Cette violation est toutefois très faible car la variation des fonctions de distribution est typiquement logarithmique. La prédiction théorique est qui décrit cette évolution des fonctions de distributions en fonction de  $q^2$  se retrouve sous le nom d'équations d'Altarelli-Parisi-Lipatov-Gribov. Elle permet d'expliquer les résultats expérimentaux tel que ceux de la figure 9.4 avec succès.

## 9.10 Existence des quarks

À l'aide d'expériences impliquant des diffusion inélastiques lepton-nucléon, il est donc possible de confirmer l'existence des quarks:



1. L'invariance d'échelle des sections efficaces semble confirmer que les partons sont des particules ponctuelles.
2. Le rapport  $\frac{F_1^{eN}}{F_2^{eN}}$  trouvé expérimentalement supporte l'hypothèse que ces derniers soient des particules de spin  $\frac{1}{2}$ .
3. Ensuite, la comparaison des fonctions de structure pour la diffusion d'électrons et de neutrinos montre que les partons ont une charge fractionnaire.

Ces résultats confirment que les partons chargés sont en fait des quarks. Rappelons aussi que l'impulsion du nucléon est non seulement transportée par les trois quarks de valence mais aussi par les gluons.

## 9.11 Problèmes

### 1. Densités de quarks

Les densités de quarks dans un proton  $f_u(x)$  et  $f_d(x)$ , où  $x$  est la fraction de momentum portée par les quarks, sont paramétrisées comme suit  $f_u(x) = 2f_d(x) = ax^b(1-x)^c$ . Le modèle des partons — les partons sont des constituants de masse nulle, c'est à dire ici les quarks  $u$  et  $d$  — prédit que la section efficace proton-proton  $pp \rightarrow CD$  est reliée à la section efficace du sous-processus  $AB \rightarrow CD$  par

$$\frac{d\sigma}{dt}(pp \rightarrow CD) = \sum_{A,B=u,d} \int_0^1 dx_A \int_0^1 dx_B f_A(x_A) f_B(x_B) \frac{d\hat{\sigma}}{dt}(AB \rightarrow CD)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont les partons.  $A(B)$  porte la fraction  $x_A$  ( $x_B$ ) du momentum du proton dont il est issu.

- (a) Écrire les variables  $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$  en fonction de  $s, t, u, x_A$  et  $x_B$ . Les variables  $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$  sont définies en utilisant les substitutions suivantes

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow x_A p_1, \\ p_2 &\rightarrow x_B p_2, \\ p_3 &\rightarrow p_3, \\ p_4 &\rightarrow p_4 \end{aligned}$$

dans la définition des variables de Mandelstam  $s, t, u$ .

- (b) Calculer  $\frac{d\sigma}{dt}(pp \rightarrow CD)$  en fonction de  $s, t, u$  pour le sous-processus suivant  $ud \rightarrow ud$  :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(ud \rightarrow ud) = \frac{\alpha_s}{9\hat{s}} \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right).$$

### 2. Diagrammes de Feynman

Dessiner les diagrammes de Feynman pour les réactions suivantes en tenant compte du contenu en quark, lepton et boson de chaque particule et identifier le type d'interaction en jeu (la force dominante).

- (a)  $e^- + p \rightarrow e^- + p$   
 (b)  $e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$   
 (c)  $e^- + p \rightarrow \nu_e + n$   
 (d)  $u + d \rightarrow u + d + d + \bar{d}$



# 10 UNIFICATION DES FORCES

## 10.1 Divergences et renormalisabilité

Nous avons passé sous silence une propriété importante des théories de jauge: la renormalisabilité. Les corrections radiatives en QED de même que celles des interactions faibles et fortes génèrent en général des divergences. Elles proviennent des calculs de boucles tels que ceux de la figure 10.8. Plus précisément, une particule à l'intérieur d'une boucle dans un diagramme de Feynman peut posséder n'importe quelle valeur d'énergie-impulsion et le calcul des corrections radiatives associées à cette boucle implique une intégration sur toutes les valeurs possibles i.e. des intégrales de la forme

$$\int d^4p f(p).$$

Dans le cas où cette intégrale diverge, il est possible de la régulariser (la remplacer par un intégrale régulière). Plusieurs méthodes sont utilisées dont la régularisation de Pauli-Villars qui consiste à introduire une coupure dans la région d'intégration (l'énergie-impulsion n'est intégrée que jusqu'à une échelle  $\Lambda$  par exemple) et la régularisation dimensionnelle qui consiste à intégrer sur  $D$  dimension d'espace-temps au lieu de 4. Quoiqu'il en soit, suivant la forme de la fonction  $f(p)$ , on obtient divers degrés de divergence que l'on catégorise de la façon suivante:

$$\int d^4p f(p) \rightarrow \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda p^3 dp f(p) \sim \begin{cases} 1 & \text{fini} \\ \ln \Lambda & \text{logarithmique} \\ \Lambda & \text{linéaire} \\ \Lambda^2 & \text{quadratique} \end{cases}$$

Les divergences sont toutefois *contrôlables* ou *renormalisables* en QED et pour certains types de théories dont les théories de jauge non-abéliennes. Plus précisément, les divergences apparaissent de façon systématique à tous les ordres de perturbation (pour tout nombre de boucles) mais elles peuvent être éliminées en ajoutant un nombre fini de *contre-terms* bien définis qui ont des divergences analogues de signe opposé. Les termes divergents s'annulent à chaque ordre (i.e. nombre de boucles) pour donner un résultat fini.

La procédure peut sembler injustifiée mais elle est appuyée par une interprétation physique intuitive. La région d'intégration qui génère la divergence est la région dite ultraviolette i.e. l'échelle d'énergie-impulsion arbitrairement grande ou de dimension spa-

tiale arbitrairement petite. Or, c'est précisément une région où nous n'avons pas accès expérimentalement. On peut donc présumer que la théorie perturbative ne décrit pas convenablement cette région. Cependant, quoiqu'il se passe dans cette région, il reste possible de calculer une quantité physique si elle correspond à la différence d'une quantité évaluée à deux échelles d'énergie-impulsion fini. Les divergences s'annulant, la quantité physique est fini. Autrement dit, la quantité physique qui nous intéresse ne dépend pas de la région ultraviolette d'où les divergences proviennent. Mais un des résultats les plus importants de la renormalisation consiste à permettre de calculer l'évolution des quantités en fonction de l'échelle d'énergie ou de distance. Par exemple, la force des couplages (les couplages efficaces) varie en fonction de la distance mais les corrections radiatives effectuées dans le cadre d'une théorie renormalisable nous permettent de prédire ces couplages à l'échelle de notre choix. Dans ce cas particulier, on peut interpréter l'évolution du couplage comme un effet d'écran (ou anti-écran selon le cas) dû aux particules virtuelles qui sont continuellement émises et réabsorbées dans un processus quantique (voir discussion à la page 229).

Les théories renormalisables sont caractérisées par des constantes de couplages adimensionnelles. La théorie des interactions faibles de Fermi et la gravité quantique ont toutes deux une constante de couplage dimensionnelle (la constante de Fermi  $G_F$  et la constante de Newton  $G_N$  respectivement) et ne sont pas renormalisables. Par opposition, le modèle standard basé sur le groupe de jauge non-abélien  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  est une théorie renormalisable malgré la brisure spontanée de symétrie électrofaible. La preuve que cette brisure n'affecte pas la renormalisabilité de la théorie a d'ailleurs été fournie par G. t'Hooft et M. Veltmann dans des travaux qui leur ont valu le prix Nobel de physique 1999.

## 10.2 Au-delà du modèle standard

### Le modèle standard en bref

Rappelons que les particules introduites dans le modèle standard ont les propriétés suivantes:

- ▶ Les fermions et anti-fermions de spin  $\frac{1}{2}$ :
  - 3 générations de quarks

$$\begin{array}{c} \text{Quarks} \\ \hline \hline \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \end{array}$$

- 3 générations de leptons

$$\begin{array}{c} \text{Leptons} \\ \hline \hline \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \end{array}$$

- Les bosons dont les bosons de jauge de spin 1 et le boson de Higgs de spin 0:

Bosons		
photon (non-massif)	$\gamma$	(10.1)
3 bosons faibles massifs	$Z_0, W^\pm$	
8 gluons colorés (non-massifs)	$g$	
Higgs (non-observé)	$H$	

- Les interactions (les deux premières étant unifiées par une relation entre leurs constantes de couplage respectives):
- électromagnétiques avec couplage  $\alpha_{em}$ ,
  - faibles avec couplage  $\alpha_w$  (ou  $G_F$  à basse énergie)
  - fortes avec couplage  $\alpha$ .

## Lacunes du modèle standard

Bien que le modèle standard ait été testé avec grande précision et soit en accord avec les résultats expérimentaux, certaines lacunes donnent à penser qu'il ne s'agit pas de la théorie fondamentale de la Nature.

En fait le modèle standard ne prédit pas

- les couplages  $\alpha_{em}$ ,  $\alpha_W$  (ou  $G_F$  à basse énergie) et  $\alpha_s$ ,
- l'existence de trois générations de quarks et de leptons,
- l'absence de mélange entre les quarks et les leptons, et
- les masses des quarks et des leptons.

En tout, un minimum de 19 paramètres doivent être trouvés expérimentalement dont les 3 couplages, les masses des 6 quarks et des 3 leptons chargés, les 3 angles de mélange et la phase de la matrice CKM, le paramètre  $\theta_{QCD}$  et 2 paramètres associés au potentiel de Higgs. Dans le cas où les neutrinos sont massifs 26 paramètres sont requis. S'ajoutent aux paramètres existants, les masses des 3 neutrinos, 3 angles de mélange et une phase qui forment une matrice de mélange analogue à la matrice CKM (voir page 210).

De plus quelques questions importantes restent ouvertes et sont souvent qualifiées par:

- **Le problème de jauge:**  
On compte trois groupes de symétrie de jauge qui décrivent les interactions avec trois constantes de couplage indépendantes. Pourquoi? Existe-t-il une relation entre les interactions fortes et les interactions électrofaibles?
- **Le problème des paramètres:**  
Au total, le modèle standard possède 19 paramètres. On peut penser qu'une théorie vraiment fondamentale aurait l'élégance de nécessiter moins de paramètres. Alors, peut-on réduire le nombre de paramètres libres du modèle standard?
- **Le problème des générations:**  
Comment peut-on expliquer la réplique des générations de quarks et de leptons.

D'abord, pourquoi *trois* générations? Puis, pourquoi des masses si différentes entre les générations de fermions? Finalement, existe-t-il une relation entre les quarks et les leptons?

- **Le problème de la quantification de la charge:**

Comment expliquer, par exemple, que la charge du proton soit exactement l'opposée de celle de l'électron?

- **Le problème de la gravitation:**

Le modèle standard n'inclut pas la gravitation (la quatrième des forces). En effet, les théories quantiques intègrent mal la gravitation, à l'exception possible de la théorie des supercordes. Dans le meilleur des cas, le modèle standard n'est donc valide que jusqu'à l'échelle de Planck ( $M_P \simeq 10^{19}$  GeV), échelle à laquelle les effets gravitationnels ne peuvent plus être négligés. Mais de façon générale, de sérieux problèmes de cohérence surgissent lorsque l'on tente tout bêtement d'inclure la gravitation en extrapolant le modèle standard jusqu'à l'échelle de Planck (voir discussion à la page 266).

- **Le problème de hiérarchie:**

Les interactions fondamentales sont décrites par la symétrie de jauge  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  du modèle standard jusqu'à l'échelle de Planck. Il n'existe alors que trois échelles d'énergie fondamentales, soit  $\Lambda_{QCD} \simeq 100$  MeV, l'échelle qui détermine le couplage fort,  $M_W \simeq 100$  GeV, l'échelle de brisure de symétrie spontanée du secteur électrofaible, et finalement  $M_P \simeq 10^{19}$  GeV. Pourquoi cette grande disparité entre les échelles?

- **Le problème d'ajustement fin:**

Ce problème est plus technique. Les corrections radiatives à la masse du Higgs possèdent des divergences plus sévères que celles rencontrées ailleurs dans le modèle standard. Ces divergences sont quadratiques c'est-à-dire qu'elles nécessitent des corrections qui impliquent le carré d'une échelle de masse. Comme la seule échelle disponible est la masse de Planck, la correction est très importante,  $\Delta M_H^2 \approx \mathcal{O}(M_P^2) \simeq 10^{19}$  GeV, plus importante que la masse physique du Higgs elle-même par plusieurs ordres de grandeur.

$$M_{H,\text{phys.}}^2 = M_H^2 - \Delta M_H^2 \ll M_P^2 \quad (10.2)$$

(Rappelons que malgré que la masse du Higgs soit inconnue pour le moment, elle doit être inférieure à 1 TeV pour des raisons de cohérence de la théorie notamment si la masse du Higgs est trop élevée, la matrice de diffusion  $S$  viole la condition d'unitarité autrement dit, la probabilité d'interaction devient supérieure à 1.) Les corrections radiatives requièrent alors un ajustement fin des paramètres du potentiel de Higgs pour que la soustraction soit précise à 19 décimales près dans (10.2). Qui plus est, cet ajustement doit être répété à tous les ordres en théorie des perturbations.

## Vers une théorie au-delà du modèle standard

La physique théorique propose plusieurs solutions qui répondent en partie à ces ques-

tions, la plupart d'entre-elles reposent sur des extensions au modèle standard dans lesquelles le modèle standard constituerait une limite à basse énergie d'une théorie plus complète, c'est-à-dire qu'il correspondrait à une théorie efficace valide seulement jusqu'à une certaine échelle  $\Lambda$ . Au-delà de cette échelle, il y aurait coupure et on verrait se manifester une nouvelle physique que le modèle standard ne serait pas en mesure d'expliquer. Les solutions proposées sont notamment:

- Grande unification (TGU: théories grandement unifiées)
- Modèles composites
- Supersymétrie
- Modèles des cordes...
- .....

À date, ces hypothèses restent spéculations mais elles sont souvent basées sur des arguments théoriques élégants et sont essentielles dans le processus de vérification du modèle standard puisqu'elles permettent de guider l'expérimentateur dans sa quête de résultats signalant de la nouvelle physique.

## 10.3 Grande unification

À haute énergie la théorie de jauge des interactions électrofaibles est unifiée sous le groupe  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ . Cette symétrie se brise spontanément à basse énergie pour ne conserver que la symétrie des interactions électromagnétiques

$$SU_L(2) \otimes U_Y(1) \rightarrow U_{em}(1).$$

Vu la structure des théories de jauge du modèle standard, i.e. le groupe  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ , il paraît naturel de se questionner sur la possibilité que cette symétrie soit unifiée par un groupe  $G$  à de très grandes échelles d'énergie

$$G \rightarrow SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1).$$

La dépendance en énergie du couplage efficace fournit un argument supplémentaire en faveur de ce scénario. Pour une théorie de jauge basée sur le groupe  $H$  (au premier ordre de perturbation)

$$\frac{1}{\alpha_n(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_n(Q_0^2)} + \frac{\beta_n}{2\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) \quad (10.3)$$

avec la fonction  $\beta_n$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{11n - 2n_f}{3} & \text{si } H = SU(n) \text{ avec } n \geq 2 \\ \beta_1 &= -\frac{2n_f}{3} & \text{si } H = U(1) \end{aligned}$$

où  $n_f$  est le nombre de fermions qui ont des interactions. Ici,

$$\alpha_n = \frac{g_n^2}{4\pi}$$

avec

$$\begin{aligned} g_3 &= g_s & \text{interaction forte} \\ g_2 &= g & \text{interaction } SU_L(2) \text{ dans le modèle WS} \\ g_1 &= N_1 g' & \text{interaction } U_Y(1) \text{ dans le modèle WS} \end{aligned}$$

où  $N_1$  établit le lien entre l'opérateur de charge  $Q$  associé  $U_{em}(1)$  à et l'opérateur d'hypercharge  $Y^W$  associé  $U_Y(1)$ . Ici  $N_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ . Il en découle que

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{em}}{N_1^2 \cos^2 \theta_W} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W} \quad (10.4)$$

ou encore

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{N_1^2 \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_{em}}.$$

Les couplages sont connus à l'échelle  $Q_0 = M_W$ . Pour un nombre de fermions  $n_f = 6$ ,

$$\beta_1 = -4, \quad \beta_2 = \frac{10}{3} \quad \beta_3 = 7,$$

et donc suivant (10.3), les couplages  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  diminuent alors que  $\alpha_1$  augmente avec l'échelle  $Q^2$  (voir figure 10.1).

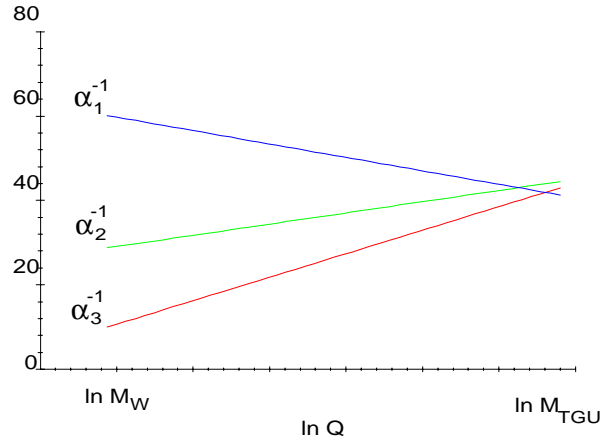


Figure 10.1 Évolution des couplages en fonction de l'énergie  $Q$ . Les couplages se croisent à une échelle d'environ  $M_{TGU} = 3.2 \times 10^{14}$  GeV.

Les couplages convergent à une *échelle d'unification*  $M_{TGU}$  de l'ordre de  $10^{14}$  GeV pour laquelle

$$\alpha_1(M_{TGU}^2) = \alpha_2(M_{TGU}^2) = \alpha_3(M_{TGU}^2).$$

L'idée d'unification semble donc toute naturelle. Elle propose qu'au delà de l'*échelle d'unification*, il n'y ait qu'une seule interaction. On peut aussi imaginer des symétries telles que les masses des particules soient identiques. La brisure de ces symétries aux échelles d'énergie plus basses donnerait lieu à des masses et des couplages différents.

On détermine l'*échelle d'unification*  $M_{TGU}$  en utilisant la relation (10.3). Il en découle après quelques manipulations

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{M_W}{M_{TGU}} \right) &= \frac{\pi}{(\beta_1 - \beta_3)} \left( \frac{1}{\alpha_1(M_W^2)} - \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha_3(M_W^2)} \right) \\ &\simeq \frac{\pi}{11} \left( \frac{1}{129} - \frac{1}{0.1} \right) \end{aligned}$$



$$\simeq -29$$

où on a utilisé la valeur des constantes de couplage à l'échelle  $M_W$  soit,

$$\alpha_3(M_W^2) = 0.1 \quad \alpha_1(M_W^2) = 129.$$

Il en ressort finalement

$$M_{TGU} \simeq e^{29} M_W \simeq 3.2 \times 10^{14} \text{ GeV}.$$

De plus, la relation (8.5) permet de prédire

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W \Big|_{M_W^2} &= \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \frac{\alpha_{em}(Q_0^2)}{\alpha_3(Q_0^2)} \\ &= 0.215 \pm 0.002 \quad \text{à } Q_0 = 20 \text{ GeV} \\ ( &= 0.216 \pm 0.012 \quad \text{expt. à } Q_0 = 20 \text{ GeV}) \end{aligned}$$

## Modèle $SU(5)$

Le groupe le plus simple qui permet d'inclure les symétries du modèle standard est le groupe  $SU(5)$

$$SU(5) \supset SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$$

d'abord proposé par Georgi et Glashow. Le contenu du modèle  $SU(5)$  est le suivant

(a) **Les bosons de jauge:**

Les bosons de jauge se situent dans la représentation adjointe (celle des générateurs). Le nombre de générateurs d'un groupe de jauge indique le nombre de bosons de jauge de la théorie. Pour un groupe  $SU(N)$ , le nombre de générateurs est  $N^2 - 1$  soit 24 pour  $SU(5)$  alors

$$\begin{array}{ccccccc} SU(5) & \supset & SU_c(3) & \otimes & SU_L(2) & \otimes & U_Y(1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{représentation} & \mathbf{24} & > & \mathbf{8} & + & \mathbf{3} & + & \mathbf{1} \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{bosons} & & & 8 \text{ gluons} & & W^\pm, Z^0 & & \gamma \end{array}$$

La représentation adjointe  $\mathbf{24}$  pourrait s'exprimer par la matrice suivante

$$A \equiv \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}} A^a = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & g_{12} & g_{13} & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ g_{21} & g_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & g_{23} & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & W^3 + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -W^3 + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

où on reconnaît les champs de jauge  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ . D'autre part, il est possible de décomposer la représentation adjointe des générateurs de  $SU(5)$  e.g.  $\mathbf{24}$  en représentations adjointes de  $SU_c(3)$  et  $SU_L(2)$ . De cette manière, on retrouve

$$\begin{aligned} SU(5) &\rightarrow (SU_c(3), SU_L(2)) \\ \mathbf{24} &= (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}). \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{8}, \mathbf{1})$ , par exemple, signifie que la particule se situe dans la représentation  $\mathbf{8}$  du

groupe de couleur  $SU_c(3)$  et dans un singulet  $1$  du groupe  $SU_L(2)$ . Les trois premières représentations  $(8, 1) \oplus (1, 3) \oplus (1, 1)$  sont les 8 gluons, les  $W^\pm, Z^0$  et finalement le photon  $\gamma$ . Les deux autres représentations  $(3, 2) \oplus (\bar{3}, 2)$  correspondent à douze bosons de jauge qui sont à la fois colorés (triplet de couleur) et faibles (isodoublet). Leur présence permet donc, contrairement à ce qui se passe dans le modèle standard de Weinberg-Salam, une interaction entre les particules colorées (les quarks) et les particules ayant une charge électrofaible (notamment les leptons). Trois d'entre-eux ont une charge électrique de  $-\frac{1}{3}$ , trois autres ont une charge de  $-\frac{4}{3}$ . Les six autres sont leurs antiparticules. Ces bosons de jauge très lourds sont souvent appelés leptoquarks  $X$  et  $Y$  et peuvent transformer un quark en un lepton (voir figure 10.2). Mais une telle transformation viole la conservation des nombres leptonique  $L$  et baryonique  $B$  tout en conservant la quantité  $B - L$ .

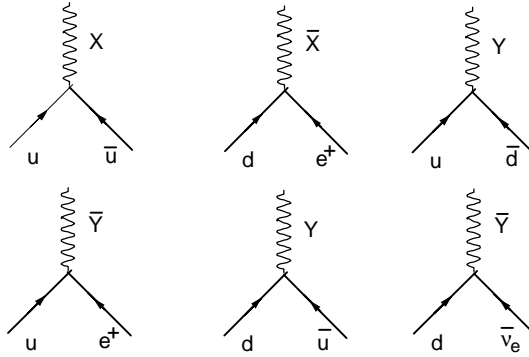


Figure 10.2 Interactions quark-lepton-leptoquark dans le modèle  $SU(5)$ .

(b) **Les fermions:**

Les fermions sont distribués dans des représentations irréductible de  $SU(5)$ . Rappelons que la représentation fondamentale de  $SU(5)$  est le quintuplet  $\bar{5}$

$$\phi^a = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ l \\ \nu_l \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{triplet de couleurs, aucun isospin} \\ \rightarrow \text{isodoublet, aucune couleur} \end{array} \right\}$$

de laquelle on peut construire les représentations  $\bar{5}, 10, \bar{10}, \dots$ . Dans le modèle  $SU(5)$ , les fermions de la première génération sont assignés aux représentations  $\bar{5}$  et  $10$

$$\bar{5} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1^c \\ \bar{d}_1^c \\ \bar{d}_1^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad 10 = \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & u_2^c & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u_2 & -d_2 \\ -u_3^c & -u_3^c & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & e^+ \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^- & 0 \end{pmatrix}$$

où l'indice  $c$  dénote le conjugué de charge de la particule.



**Remarque 10.1**

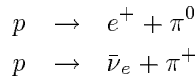
Dans  $SO(10)$ ,  $\nu_R$  doit être présent et les neutrinos doivent être massifs alors que dans des groupes plus grands tels que  $E_6, E_7, E_8, \dots$  d'autres particules "exotiques" doivent être introduites.

(c) **Les interactions**

Mis à part les couplages du modèle standard, il s'ajoute ceux de la figure 10.2.

**La désintégration du proton**

Ces derniers couplages impliquent directement que le proton peut se désintégrer en mésons et leptons. Par exemple, les réactions suivantes sont possibles (voir la figure 10.3):



Le taux de transition de tels processus est calculable dans ce modèle. On en déduit la

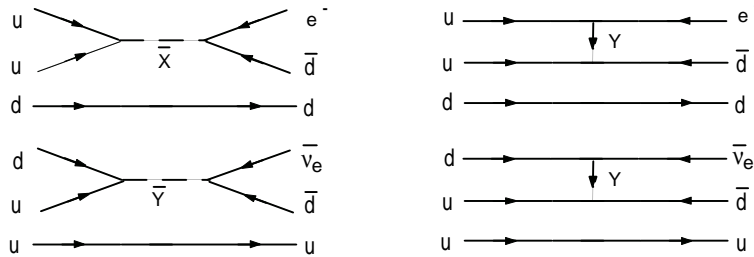


Figure 10.3 Diagrammes décrivant la désintégration du proton  $p \rightarrow e^+ + \pi^0$  et  $p \rightarrow \bar{\nu}_e + \pi^+$ .

vie moyenne du proton

$$\tau_p = \frac{4\pi A M_X^4}{\alpha m_p^5}$$

$$= 2 \times 10^{29 \pm 1.7} \text{ années}$$

où  $\alpha$  est le couplage à l'échelle  $M_{TGU}$  où les trois couplages  $\alpha_1, \alpha_2,$  et  $\alpha_3$  se rencontrent,  $A$  tient compte de la partie hadronique des éléments de matrice et  $M_X \sim 10^{14}$  GeV. L'incertitude dans l'estimé vient de la piètre connaissance qu'on a de  $\alpha_3$  (ou de  $\Lambda_{\overline{MS}} = 0.160 \pm 0.100$  GeV).

Il est assez facile d'obtenir des estimés de la vie moyenne du proton par la simple observation que la matière qui nous entoure n'est pas toute radioactive. Par exemple, il est facile de conclure par cette observation que la vie moyenne du proton est plus grande que l'âge de la Terre. Toutefois la mesure qui nous intéresse implique une période de temps de l'ordre de  $10^{31}$  années et ce qui à première vue, peut sembler impossible considérant l'âge de l'Univers et de la durée prévue d'une telle expérience. En fait, au lieu d'étaler l'observation d'un proton sur  $10^{31}$  années pour voir s'il se désintègre, il est

beaucoup plus pratique de regarder  $10^{31}$  protons pendant une année.

L'expérience nécessite alors

- ▶ une très grande masse (grand nombre de protons),
- ▶ un détecteur de trajectoires de particules chargées: les deux principales techniques utilisent des plaques de fer combinées à des chambres de détection de trajectoires (e.g. expériences NUSEX, FREJUS, SUDAN...) ou des détecteurs Cerenkov (e.g. expériences IMB (voir la figure 10.4), Kamiokande)
- ▶ des mesures de l'énergie permettant une identification des particules et finalement
- ▶ un blindage qui résiste aux rayons cosmiques pour isoler complètement le réservoir de protons (la solution la plus pratique consiste à enfouir le détecteur à quelques kilomètres sous la terre dans une mine)

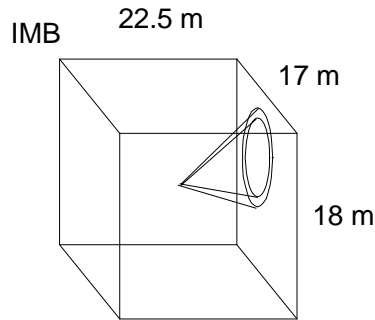


Figure 10.4 Le détecteur IMB consiste en un énorme réservoir d'eau (protons), milieu où le rayonnement Cerenkov peut se propager. Des phototubes couvrent la surface externe du détecteur. Le signal  $p \rightarrow e^+ + \pi^0$  suivi de  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  peut être couvert par le bruit originant par exemple de  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ + \pi^0$ . Aucun événement sur 5 ans pour un réservoir de 7000 tonnes d'eau permet d'estimer  $\tau_p > 5 \times 10^{32}$  ans.

Les mesures actuelles de la vie moyenne du proton repoussent les limites à  $\tau_p > 5 \times 10^{32}$  années ce qui exclut le modèle  $SU(5)$ .

## Monopôles magnétiques

Ajoutons qu'une autre prédiction des modèles grandement unifiés reste absente des observations. En effet, ces modèles prédisent la présence de monopôles magnétiques, des particules qui portent une charge magnétique mais aucune charge électrique.

La charge magnétique fut proposée par Dirac en 1931 sous la forme de la relation

$$g_{\text{Dirac}} = \frac{\hbar c}{2e} n = \frac{ne}{2\alpha_{\text{em}}} = 68.5e$$

où  $n$  est un entier. La masse du monopôle  $M_M$  dépend linéairement de la masse du boson  $X$

$$M_M \gtrsim \frac{M_X}{g_3} \sim 10^{16} \text{ GeV} = 0.02 \mu g_3$$

où  $g_3$  est le couplage fort. Il s'agit d'une masse énorme et tout comme pour le boson

$X$ , il est très peu probable que l'on réussisse à le produire dans les accélérateurs dans un avenir rapproché. Une telle énergie aurait été disponible à environ  $10^{-35}$ s après le Big Bang ce qui laisse entrevoir la possibilité qu'une quantité de ces particules reliques existe toujours et qu'un flux constant en frappe la Terre. Pour l'instant cependant, aucun signal de la présence de monopôles n'a encore été détecté.

## Modèle $SO(10)$

La prédiction de la vie moyenne du proton donnée par le modèle  $SU(5)$  étant un échec, on peut penser qu'un modèle basé sur un groupe plus grand aura plus de succès puisque les contraintes y sont moins sévères. Il est même possible pour certains groupes de contenir une génération complète de leptons et de quarks dans une seule représentation irréductible. L'exemple le plus simple d'un tel groupe est le groupe orthogonal  $SO(10)$  dans lequel les fermions sont placés dans la représentation  $\mathbf{16}$ :

$$\mathbf{16} = (\nu_e, u_r, u_b, u_v; e^-, d_r, d_b, d_v; \bar{d}_r, \bar{d}_b, \bar{d}_v, e^+; \bar{u}_r, \bar{u}_b, \bar{u}_v, \nu_e^c)_L.$$

Le modèle  $SO(10)$  peut être brisé en plusieurs étapes et emprunter plusieurs voies pour arriver au groupe du modèle standard:

$$\begin{array}{ccccc} & & SU(4) \otimes SU_L(2) \otimes SU_R(2) & & \\ & & \downarrow & & \\ SO(10) & \longrightarrow & SU(5) & \longrightarrow & SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1) \\ & & \downarrow & & \\ & & SU(5)' \otimes U_X(1) & & \end{array}$$

Ici le groupe  $SU(5)'$  ne correspond pas au groupe  $SU(5)$  de Georgi et Glashow décrit plus haut.

Le proton est instable et le nombre baryonique n'est pas conservé dans le modèle  $SO(10)$ . Les bosons de jauge sont regroupés dans la représentation  $\mathbf{45}$  où on trouve plusieurs leptoquarks pouvant permettre la transmutation d'un quark en lepton. Par ailleurs, des leptoquarks scalaires apparaissent dans la représentation du secteur de Higgs et peuvent aussi entraîner la violation du nombre baryonique. Toutefois, les brisures séquentielles du groupe  $SO(10)$  vers le groupe  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  introduisent des paramètres supplémentaires et donc plus de souplesse dans la prédiction de l'échelle d'unification et de la vie moyenne du proton. Les paramètres du modèle  $SO(10)$  peuvent donc être ajustés pour prédire un proton plus stable. Le modèle  $SO(10)$  demeure donc jusqu'à maintenant un choix viable de TGU. Rappelons toutefois qu'une des motivations derrière les théories grandement unifiées était la réduction du nombre des paramètres requis par la théorie.

## Autres modèles d'unification

Les divers modèles d'unification des forces font légion. Il suffit de trouver un groupe suffisamment grand pour inclure les symétries du modèle standard et de construire les

représentations qui accommodent les particules connues. Le cadre de cet ouvrage se prête mal à une étude exhaustive des différents modèles. Mentionnons toutefois quelques modèles qui se distinguent par leurs propriétés:

### Modèle $SU(15)$

Le modèle  $SU(15)$ , bien qu'il requiert encore plus de paramètres — il est donc moins *économique* —, ne prédit pas la désintégration du proton. Dans ce modèle, les fermions d'une même génération sont tous dans la représentation fondamentale **15** du groupe:

$$\mathbf{15} = (u_r, u_b, u_v; d_r, d_b, d_v; \bar{u}_r, \bar{u}_b, \bar{u}_v; \bar{d}_r, \bar{d}_b, \bar{d}_v; e^+; \nu_e; e^-).$$

Comme le nombre baryonique total du multiplet **15** est nul et que c'est aussi le cas pour la représentation adjointe **224** qui décrit les bosons de jauge, sa conservation est donc assurée dans toutes les interactions. Rappelons que l'échelle de la brisure de symétrie du groupe était principalement déterminée par la contrainte sur la vie moyenne du proton. Cette contrainte n'existe pas ici, si bien que la brisure de symétrie peut se dérouler à une échelle de l'ordre de  $M_X \simeq 10^7$  GeV, bien en-dessous de celle qui est prédite dans les modèles TGU présentés plus haut.

La brisure de  $SU(15)$  vers le modèle standard procède par plusieurs étapes introduisant plusieurs séquences de symétries et plusieurs échelles intermédiaires de brisure. Outre les particules standard, le modèle  $SU(15)$  introduit des particules exotiques telles que des diquarks (nombre baryonique 2), des leptoquarks (nombres baryonique et leptonique non nul) et des bileptons (nombre leptonique 2), la plupart étant trop lourds pour être observés directement dans les collisionneurs actuels.

### Modèles partiellement unifiés: le modèle $SU(4)$

Le modèle  $SU(4)$  proposé par Pati et Salam fut le premier à prédire l'existence de leptoquarks. Mais il a aussi la vertu de restaurer une certaine symétrie quark-lepton en considérant le nombre leptonique comme quatrième couleur, baptisée  $l$  ou "lilas". Le groupe de jauge est donné par  $SU_V(4) \otimes SU(2)_L \otimes G_R$ , où  $G_R$  est le groupe de symétrie des fermions de chiralité droite. Un tel modèle peut découler du modèle  $SO(10)$  (voir plus haut) se réalisant dans la limite à basse énergie.



Dans le modèle de Pati et Salam, les fermions se retrouvent dans la représentation fondamentale **4** de  $SU_V(4) \supset SU_c(3)$ :

$$\mathbf{4} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_b \\ u_v \\ \nu_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_r \\ d_b \\ d_v \\ e^- \end{pmatrix}.$$

où la symétrie quark-lepton est explicite.

Les bosons de jauge de la représentation adjointe **15** contiennent outre les huit gluons sans masse, six leptoquarks massifs de charge électrique  $Q = \pm \frac{2}{3}$  et un nouveau boson neutre massif. La présence de leptoquarks permet la désintégration du proton mais les processus violant le nombre baryonique sont sévèrement supprimés. Les prédictions du modèle n'entrent donc pas en contradiction avec les limites expérimentales sur la durée de vie du proton.

Résumant, le bilan des modèles grandement unifiés se dresse comme suit:

En faveur 	Contre 
Unification des interactions à haute énergie. Réduction du nombre de paramètres. Prédications de l'angle de Weinberg et des masses des quarks.	Aucune évidence de désintégration du proton. Aucune évidence de monopôles magnétiques. Aucune évidence d'états excités de quarks et leptons.

## 10.4 Technicouleur

L'absence de Higgs dans spectre des particules détectées dans les collisionneurs actuels suggèrent qu'il y a peut-être une autre voie pour expliquer la brisure de symétrie électrofaible que celle proposée par le modèle standard: la technicouleur. La technicouleur ne contient aucun scalaire fondamental. La brisure de symétrie électrofaible est dynamique — et non spontanée — et se produit dans le cadre d'une théorie de jauge fortement couplée ne contenant que des fermions.



Comme son nom l'indique, la technicouleur est une théorie fortement inspirée de QCD. On y propose l'existence d'une interaction de jauge  $SU_{TC}(N)$  dont l'échelle d'énergie est de l'ordre du TeV, c'est-à-dire environ mille fois plus grande que celle de QCD. De plus de nouvelles particules sont introduites: les technifermions. Ils se retrouvent dans des doublets et singulets d'interactions faibles et dans des multiplets de technicouleur. Par ailleurs, les scalaires qui apparaissent dans cette théorie ne sont pas fondamentaux mais sont plutôt des états liés de paires fermion-antifermion, les technimésos, par analogie aux mésons générés en QCD. Trois de ces bosons de Goldstone correspondent aux composantes longitudinales des bosons faibles  $W^\pm$  et  $Z^0$ .

En général, toutefois, les modèles de la technicouleur doivent être étendus pour permettre à la technicouleur de générer une masse aux fermions. Rappelons que le mécanisme de Higgs donne aussi une masse aux fermions via l'introduction de couplages de Yukawa du type fermion-fermion-Higgs. Les modèles étendus de technicouleur (ETC) suggèrent l'existence de nouvelles interactions de jauge entre les technifermions et les fermions ordinaires. Plusieurs particules exotiques telles que les leptoquarks et de nouveaux bosons de jauge sont alors associés à ETC. Ces modèles rencontrent cependant quelques difficultés puisqu'ils contribuent aux processus de changement de saveur à courant neutre ce qui entre en conflit avec les résultats expérimentaux. De plus, les technimésos — les états liés les plus légers prédits par cette théorie — devraient déjà avoir été observés dans les collisionneurs, ce qui n'est pas le cas de toute évidence.

Il existe des moyens de contourner ces difficultés par l'entremise de théories telles que la *technicouleur rampante* (walking technicolor) qui ont la particularité d'avoir des couplages efficaces qui varient très peu en fonction de l'échelle d'énergie par opposition à la technicouleur (running technicolor). Mais l'introduction de ces nouvelles théories se fait au détriment de la simplicité et de l'élégance des modèles originaux, ce qui explique le déclin de popularité de l'approche de la technicouleur depuis quelques années.

Finalement, la situation de la technicouleur en tant que théorie se résume comme

suit:

En faveur 	Contre 
<p>Aucun Higgs.</p> <p>Analogue à QCD mais à une échelle d'énergie 1000 fois plus grande</p>	<p>Évidence expérimentale attendue n'est pas observée.</p> <p>Contribue aux processus de changement de saveur par courants neutres.</p>

## 10.5 Modèles composites

L'histoire nous apprend que notre perception de ce qu'est une particule élémentaire fondamentale a souvent dû être révisée. L'atome s'est vu décomposé en noyau et électrons, le noyau en protons et neutrons, les baryons et mésons en quarks et antiquarks. Ne serait-il pas possible alors qu'il existe une sous-structure aux quarks et leptons même si on les considère présentement comme élémentaires? C'est cette approche qui est préconisée dans les modèles composites où quarks et leptons sont des combinaisons de *préons*, les particules plus fondamentales.

De façon générale, des évidences de sous-structure devraient se présenter dans les mesures de section efficace aux énergies correspondant à l'énergie de liaison des préons. Par exemple, les collisions  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ,  $e^+ + \mu^- \rightarrow \mu^+ + e^-$  et  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$  etc... pourraient montrer des signes de compositivité de la même façon que la diffusion de Rutherford et les collisions  $eN$  et  $\nu N$  ont démontré respectivement que l'atome et le nucléon étaient formés de briques plus fondamentales. Outre de tels facteurs de forme dans les collisions leptoniques, d'autres manifestations comme des moments magnétiques anormaux, et des processus interdits dans le cadre du modèle standard sont attendus. De plus pour des collisions au-delà d'une certaine énergie, on pourrait également observer des états excités de leptons, de quarks et de bosons de jauge.

À date, aucune évidence d'une telle sous-structure ne s'est manifestée repoussant une sous-structure éventuelle à des dimensions d'au plus  $2 \times 10^{-19}$  m ou à des échelles d'énergie ayant des valeurs au-delà de 1 TeV.

### Modèle d'Abbott et Farhi

Le modèle d'Abbott et Farhi est un prototype du genre. Dans ce modèle, non seulement les quarks et les leptons sont considérés comme composites mais les bosons  $Z^0$  et  $W^\pm$  sont aussi des particules composites. Les interactions faibles observées sont alors réinterprétées comme des interactions résiduelles analogues à celles que l'on observe entre les hadrons. De plus, la brisure de symétrie est dynamique — par opposition à la brisure spontanée dans le modèle standard — c'est-à-dire que les interactions de jauge confinent les constituants pour former le spectre des fermions observés à l'échelle de Fermi. La masse est générée dynamiquement tout comme celle des nucléons est une conséquence du confinement des quarks via QCD.





Les états fondamentaux (préons) postulés par le modèle d'Abbott et Farhi sont des scalaires dénotés  $\phi$  et des fermions dénotés  $\psi$ . Les interactions  $SU_L(2)$  sont par ailleurs fortement couplées (contrairement aux interactions faibles du modèle standard). Les fermions de chiralité droite sont des singulets sous  $SU_L(2)$ . Ils n'ont donc pas d'interaction  $SU_L(2)$ , ne sont donc pas couplés fortement et sont donc fondamentaux. Par contre, les fermions de chiralité gauche interagissent fortement sous  $SU_L(2)$  (ne pas confondre ici avec les interactions fortes de QCD) pour former des états liés à partir d'un fermion fondamental (un préon) et d'un scalaire, par exemple  $f_L = \phi_i^* \psi_L^i$ . On explique les bosons de jauge faibles par une construction basée sur deux scalaires, e.g.  $\phi D_\mu \phi$  où  $D_\mu$  est la dérivée covariante de  $SU(2)_L \otimes U(1)$ . Finalement, le boson de Higgs est quant à lui un état formé de deux scalaires préoniques.

Outre les particules retrouvées dans le modèle standard, l'existence d'une multitude de particules exotiques est également prédite: des quarks, des leptons et des bosons faibles excités, des bileptons, des diquarks et des leptoquarks. La masse de ces particules est générée dynamiquement par l'interaction faible dans son régime de confinement. Ces masses devraient être de l'ordre de  $G_F^{-1/2} \sim 300$  GeV, c'est-à-dire l'échelle de la brisure dynamique de l'interaction faible.

Le modèle original d'Abbott et Farhi souffre des mêmes lacunes que les autres modèles composites. Aucune déviation attendue n'a été observée à ce jour et donc celui-ci ne semble plus constituer un candidat sérieux pour expliquer la théorie des interactions faibles.

Résumant, le bilan des modèles composites se dresse comme suit:

En faveur 	Contre 
Précédents historiques  Origine commune pour quarks et leptons.	Aucune explication sur le nombre de générations. Aucune évidence de déviations dues à une sous-structure. Aucune évidence d'états excités de quarks et leptons.

## 10.6 Supersymétrie (SUSY)

La supersymétrie est une propriété qui implique un nombre égal de degrés de liberté fermioniques et bosoniques. Une transformation supersymétrique  $Q$  change un boson en fermion et vice et versa

$$Q |\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle \quad Q |\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle$$

Une théorie supersymétrique est laissée invariante sous une telle transformation. En conséquence, dans une théorie supersymétrique, chaque fermion normal possède un superpartenaire qui est un boson. De la même manière, chaque boson normal possède un superpartenaire qui est un fermion.

La supersymétrie relie entre elles des particules de spin différent. Il ne s'agit pas d'une symétrie interne telle que les symétries de jauge. En fait, elle correspond plutôt à un élargissement du groupe de Poincaré (le groupe de Poincaré inclut le groupe des

transformations de Lorentz et des translations) vers un groupe de super-Poincaré. On l'interprète comme l'extension de l'espace-temps à un super-espace qui comprend des coordonnées grassmanniennes (spinorielles) aussi bien que des coordonnées ordinaires. Il est aussi intéressant de constater que deux transformations supersymétriques consécutives de coordonnées ordinaires donnent des coordonnées ordinaires c'est-à-dire, qu'elles sont équivalentes à une translation. Par abus de langage, on dit alors que la transformation supersymétrique est la racine carrée d'une translation.

Les avantages d'une théorie supersymétrique sont nombreux. Contrairement à la technicouleur, on y introduit un secteur de Higgs avec couplage faible ce qui permet une analyse perturbative. De plus, la supersymétrie offre une solution très élégante au problème technique de hiérarchie. L'apport des superpartenaires aux corrections radiatives réduit le degré de divergence dans le calcul de la masse du Higgs. Par ailleurs, le problème d'ajustement fin disparaît aussi si la différence de masse entre les fermions du modèle standard et leur partenaire supersymétrique n'est pas trop grande.

Par convention, les superpartenaires sont dénotés par un tilde. Les superpartenaires scalaires de fermions sont identifiés en ajoutant un 's' devant le nom du fermion normal alors que les superpartenaires fermioniques de bosons sont identifiés en ajoutant un 'ino' à la fin du nom du boson normal. Le spectre du modèle standard minimal se lit donc comme suit:

Nomenclature des particules supersymétriques					
symbole	spin	nom	symbole	spin	nom
$e, \mu, \tau$	$\frac{1}{2}$	électrons,...	$\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}$	0	sélectrons,...
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	neutrinos	$\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau$	0	sneutrinos
$u, d, s, c, b, t$	$\frac{1}{2}$	quarks	$\tilde{u}, \tilde{d}, \tilde{s}, \tilde{c}, \tilde{b}, \tilde{t}$	0	squarks
$\gamma$	1	photon	$\tilde{\gamma}$	$\frac{1}{2}$	photino
$Z^0, W^\pm$	1	bosons de jauge	$\tilde{Z}^0, \tilde{W}^\pm$	$\frac{1}{2}$	zino, wino
$g$	1	gluon	$\tilde{g}$	$\frac{1}{2}$	gluino
$H_1, H_2$	0	higgs	$\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$	$\frac{1}{2}$	higgsinos

La supersymétrie n'est pas une symétrie exacte de la nature. Si c'était le cas, on aurait déjà découvert depuis longtemps les superpartenaires de chacune des particules du modèle standard puisque ceux-ci auraient la même masse. À date aucune particule supersymétrique n'a été observée. Par exemple, le sélectron (particule scalaire ayant les mêmes charges et en principe la même masse que l'électron) serait relativement facile à produire dans les accélérateurs actuels mais il manque à l'appel.

Les superpartenaires se distinguent par un nouveau nombre quantique appelé la parité  $R$ . Les particules du modèle standard ont une parité  $R = +1$  alors qu'on assigne une parité  $R = -1$  aux superpartenaires. Le produit des parités  $R$  est conservé tout comme dans le cas de la parité "spatiale". Il en découle que si on tente de produire des particules supersymétriques à partir de particules normales, elle doivent être produites en paires. Par exemple, considérons la collision des particules  $a$  et  $b$  qui donne deux particules supersymétriques  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  accompagnées d'un nombre arbitraire de particules normales

dénoté ici par .... La conservation de la parité se vérifie comme suit:

$$a + b \rightarrow \tilde{c} + \tilde{d} + \dots$$

$$R_{tot} = (+1) \cdot (+1) = (-1) \cdot (-1) \cdot (+1)$$

De plus, une particule supersymétrique pourra se désintégrer en particules plus légères mais le processus implique toujours au moins une particule supersymétrique dans les produits de désintégration. Par exemple,

$$\tilde{a} \rightarrow \tilde{b} + \dots$$

$$R_{tot} = (-1) = (-1) \cdot (+1)$$

Finalement, il doit exister une particule supersymétrique stable puisque la plus légère ne peut plus se désintégrer sans violer la conservation de la parité  $R$ .

$$\tilde{a} \rightarrow b + c + \dots$$

$$R_{tot} = (-1) \neq (+1) \cdot (+1) \cdot (+1)$$

La nature de la particule supersymétrique la plus légère (PSL) reste aussi un mystère. Si celle-ci est le résidu de toutes les désintégrations de particules supersymétriques depuis le début de l'Univers, on serait en droit de s'attendre à ce qu'il en existe en quantité abondante. L'absence de tout signal laisse donc supposer qu'elle est neutre et n'interagit pas fortement. Les candidats pour la particule supersymétrique la plus légère se limite alors au photino, au sneutrino et au gravitino (le superpartenaire du graviton). La plupart des théories suggèrent que la PSL soit le photino. Celui-ci est alors stable et difficile à observer puisque neutre. Toutefois, lorsque des particules supersymétriques sont produites et se désintègrent éventuellement en particules plus légères, elles produisent en toute fin des PSL (des photinos ici) et ces dernières emportent une partie de l'énergie-impulsion initiale même si elles restent invisibles. La signature caractéristique de la production de particules supersymétriques est donc un défaut d'énergie ou une énergie manquante dans la réaction. Par exemple, la production au LEP d'une paire sélectron-antisélectron dans une collision  $e^+e^-$  est suivie de la désintégration des deux sélectrons en électrons et photinos (voir figure 10.5). Les photinos étant invisibles à la détection, un bilan des énergies et impulsions permettrait de signaler la présence de sélectrons. Aucun

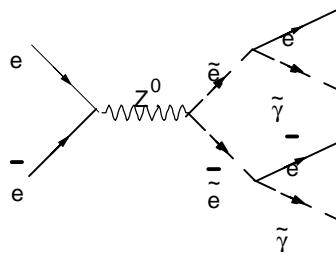


Figure 10.5 Production de paires de sélectrons suivie de la désintégration des sélectrons en photinos et électrons.

événement de ce type n'a été observé pour le moment. Cela suggère que la masse des particules supersymétriques est probablement trop élevée pour qu'elles soient produites aux accélérateurs actuels. La limite de masse se situe en général

$$M \geq 50 - 100 \text{ GeV}$$

S'il y a supersymétrie, elle est donc forcément brisée aux échelles d'énergie que nous sommes en mesure de sonder présentement ou autrement dit, la supersymétrie est une symétrie qui s'instaure à très haute énergie. La nature exacte du processus de brisure est encore à ce jour inconnue, mais la brisure ne peut pas être spontanée de nature (mécanisme de Higgs). La méthode généralement employée pour briser cette symétrie consiste à introduire des termes au lagrangien, qui violent explicitement la supersymétrie tout en préservant ses propriétés essentielles.

## Modèles supersymétriques

Plusieurs modèles supersymétriques ont déjà été proposés. Le plus étudié est sûrement le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM) qui comme son nom l'indique est l'extension supersymétrique minimale du modèle standard que nous connaissons bien. Le MSSM introduit un nombre minimal de nouveaux champs (un deuxième Higgs et tous les superpartenaires) mais conserve le même groupe de jauge i.e.  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ .

Il existe également des versions supersymétrique des modèles unifiés et même grandement unifiés basées sur des groupes tels  $SU(5)$ ,  $SU(5) \otimes U(1)$  et  $SO(10)$ . La perspective d'une unification supersymétrique semble à première vue très attrayante. Le problème de hiérarchie entre l'échelle de brisure électrofaible  $M_W$  et l'échelle d'unification  $M_X$  est naturellement écarté. De plus, l'unification des constantes de couplage à haute énergie est réalisée plus facilement dans un modèle supersymétrique (voir figure 10.6), à condition que l'échelle de brisure  $M_{\text{SUSY}}$  soit de l'ordre de 1 TeV ou inférieure. En effet dans les TGU examinées plus haut l'unification des trois constantes de couplage est approximative (voir figure 10.1). Finalement, l'échelle d'unification est plus élevée, soit de l'ordre de  $M_X = 10^{16}$  GeV pour le modèle  $SU(5)$  supersymétrique. La prédiction pour la vie moyenne du proton est donc modifiée en conséquence et se chiffre à  $10^{35}$  ans, ce qui est en accord avec les limites expérimentales les plus récentes.

La supersymétrie présente aussi un autre avantage considérable: l'évolution des masses de scalaires est beaucoup moins problématique. Supposant une masse commune pour tous les éléments d'un même multiplet à l'échelle d'unification  $M_X$ , le carré de la masse d'un des Higgs évolue très rapidement en diminuant l'échelle d'énergie pour devenir négatif à basse énergie. Comme on a déjà vu en théorie électrofaible, lorsque ce paramètre devient négatif, il induit automatiquement la brisure spontanée de symétrie électrofaible. La supersymétrie est donc en mesure de simuler dynamiquement la brisure spontanée de symétrie électrofaible. Cependant, ce mécanisme n'apporte pas de solution au problème de hiérarchie. Pour que le mécanisme soit valide, il faut postuler l'existence d'une hiérarchie dans les interactions de jauge à cause de la forte dépendance de l'évolution de la masse du Higgs face au choix des conditions initiales à l'échelle d'unification.

Résumons par le tableau suivant les succès et lacunes de la supersymétrie:

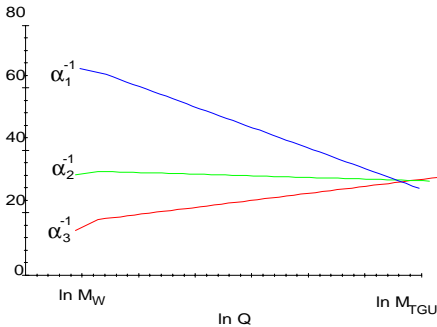




Figure 10.6 Évolution des constantes de couplage dans un modèle supersymétriques. On note le changement de comportement qui se situe à l'échelle de la brisure supersymétrique soit environ à 1 TeV.

En faveur 	Contre 
Calcul perturbatif donne des comportements divergents moins sévères Unification des fermions et bosons. Extension possible à la géométrie de l'espace-temps et donc à la gravitation (la supersymétrie relie le changement de spin à une translation).	Aucune évidence expérimentale

La supersymétrie est considérée comme une des meilleures sinon la meilleure théorie au-delà du modèle standard.

## 10.7 Gravité quantique

La gravitation est la quatrième force parmi les interactions connue et c'est aussi la plus faible par plusieurs ordres de grandeur. Elle fut la première à être reconnue comme une propriété fondamentale de la matière et à être analysée systématiquement. Paradoxalement, de nos jours, c'est la gravitation qui soulève le plus d'interrogations puisqu'elle s'accorde mal avec la mécanique quantique.

La constante gravitationnelle (en unités S.I.)

$$G_N = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

détermine la force du couplage entre deux masses. Comparons la force du couplage entre deux protons telle que donnée par la théorie de Newton,

$$\alpha_G = \frac{G_N m_p^2}{4\pi \hbar c} \simeq 4.6 \times 10^{-40}$$

où  $m_p$  est la masse du proton. La force gravitationnelle est donc comparable à la répulsion électrostatique seulement à de très courtes distances de l'ordre de

$$L_P = \left( \frac{G_N \hbar}{4\pi c^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

où  $L_P$  est appelée la longueur de Planck. Pour sonder de telles distances, il faut des particules dont la longueur d'onde est d'au plus la longueur de Planck ce qui correspond à des énergies d'au moins la masse de Planck soit

$$M_P \simeq 10^{19} \text{ GeV.}$$

(Rappelons que l'échelle d'énergie de grande unification est plus petite de quelques ordres de grandeur soit  $M_{TGU} \simeq 10^{15} \text{ GeV}$ .)

Mais si la gravité devient aussi importante à ces échelles d'énergie que les interactions forte, électromagnétique et faible dont le traitement est quantique, il convient de se demander s'il ne faut pas quantifier la gravité. Par analogie avec les autres interactions, le champ gravitationnel doit être équivalent à l'échange de particules. On postule donc l'existence de gravitons; l'échange de ceux-ci entre des masses est responsable

du champ gravitationnel. La portée des interactions gravitationnelle étant infinie, il en découle que la masse des gravitons se doit d'être nulle.

Rappelons que la gravitation s'explique en relativité générale comme une courbure de l'espace-temps décrite par une métrique intrinsèque

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

Le graviton  $h_{\mu\nu}(x)$  est introduit comme une fluctuation quantique de la métrique i.e.

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \hbar h_{\mu\nu}(x) + O(\hbar^2).$$

On note que  $h_{\mu\nu}$  est un tenseur de rang 2 symétrique dans l'échange  $\mu \leftrightarrow \nu$  et représente une particule de spin 2 ayant 10 degrés de liberté. Le spin de la particule d'échange est déterminant dans la nature de la force entre particules identiques. Notons que par exemple, pour des spins demi-entiers ou entiers supérieurs à deux, aucune force n'est produite alors que l'échange de particules de spin 0 et 1 donne respectivement des forces attractive et répulsive. Finalement l'échange de particules de spin 2 comme dans le cas de la gravité donne une force d'attraction, comme il se doit.

Tout comme c'est le cas le  $W^\pm$ , le  $Z^0$  et le gluon, le graviton peut interagir avec lui-même aussi bien qu'avec la matière ordinaire. La simple quantification de la gravité pose problème: le calcul de sections efficaces de diffusion tel qu'illustré à la figure 10.7 mène à des divergences très sévères (quadratiques) lorsqu'on ajoute les corrections radiatives comme celles de la figure 10.8.

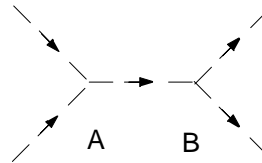


Figure 10.7 Exemple de diffusion de deux gravitons.

En fait, cette théorie de la gravité quantique n'est pas renormalisable pour les raisons évoquées au début de ce chapitre.

## La supergravité

La solution au problème des divergences peut passer par la supersymétrie. Lorsqu'elle est traitée comme une symétrie locale, la supersymétrie incorpore de façon naturelle la gravitation (changement local de la métrique). On l'appelle alors la supergravité (SUGRA).

Dès son introduction, la supergravité souleva l'espoir que la supersymétrie allait permettre l'annulation pur et simple des divergences et que la théorie qui en résulte soit finie. Cependant malgré que le degré de divergence diminue, elles ne disparaissent pas complètement. Encore une fois, comme le couplage gravitationnel n'est pas adimensionnel, la moindre divergence rend la théorie non-renormalisable et donc incohérente.

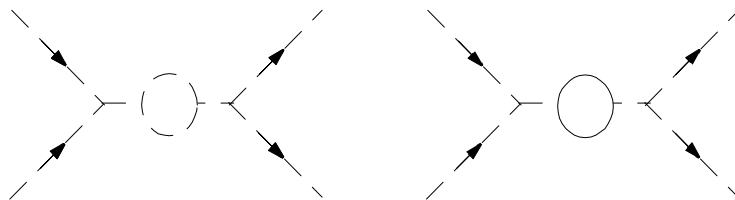




Figure 10.8 Diagramme de Feynman de contribution d'ordre supérieure à la diffusion de gravitons.



En conclusion, les succès et lacunes de la supergravité peuvent se lire comme suit:

En faveur 	Contre 
Degré de divergence moins sévère Inclusion de la supersymétrie	Aucune évidence expérimentale Théorie non-renormalisable

Il semble maintenant très improbable qu'un modèle SUGRA puisse mener à une théorie quantique de la gravitation mais il est possible qu'elle soit un ingrédient dans une théorie plus fondamentale.

## 10.8 Supercordes

Les divergences dans les théories renormalisables (comme le modèle standard) ou non-renormalisables (comme la gravité quantique) ont pour origine la nature ponctuelle des particules dans les théories des champs que nous utilisons. Ce n'est pas très étonnant, même classiquement, des divergences se manifestent. Par exemple, le champ électrique tend vers l'infini lorsqu'on s'approche d'une particule chargée ponctuelle. La justification physique derrière la nature ponctuelle des particules repose à tort ou à raison sur l'argument suivant: Si les particules ne sont pas ponctuelles, on peut envisager de les analyser en divisant l'espace qu'elles occupent en éléments de volume infinitésimaux. Ce traitement est équivalent à considérer une sous-structure formée d'objets ponctuels, ce qui nous retourne au point de départ.

La théorie des cordes prend une approche différente. Les particules ne sont pas ponctuelles, ce sont des cordes, i.e. des objets ayant une extension linéaire. Le spectre des particules est obtenu en tenant compte des différents modes de vibration de ces cordes. Deux types de cordes sont possibles: les cordes ouvertes avec deux extrémités distinctes et les cordes fermées (voir figure 10.9).

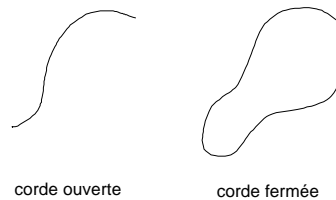


Figure 10.9 Exemple de cordes ouvertes (à gauche) et fermées (à droite).

Pour des raisons de cohérence mathématique, les théories des cordes doivent être formulées en 26 dimensions d'espace-temps pour des champs bosoniques et en 10 dimensions d'espace-temps pour des cordes supersymétriques aussi appelées supercordes. Cette dernière est pour le moment la seule candidate viable pour un traitement unifié de toutes les interactions fondamentales dans une théorie quantique libre d'anomalies et de divergences ultraviolettes.

À première vue, il est difficile de justifier que de telles théories peuvent représenter un monde à 4 dimensions d'espace-temps. Cependant il est possible de raccrocher ces

théories à une réalité à 4 dimensions en utilisant la compactification, une idée suggérée par Kaluza et Klein dans les années '20. Kaluza et Klein proposèrent à l'origine d'ajouter une cinquième dimension d'espace-temps aux 3+1 existant déjà. La dimension supplémentaire est ensuite enroulée sur elle-même avec un diamètre d'enroulement très petit, si petit en fait qu'à toute fin pratique l'enroulement n'est pas perceptible au monde physique qui nous entoure. C'est ce qu'on appelle la compactification. Seul un "microscope" très puissant serait en mesure de voir cette cinquième dimension (voir figure 10.10).

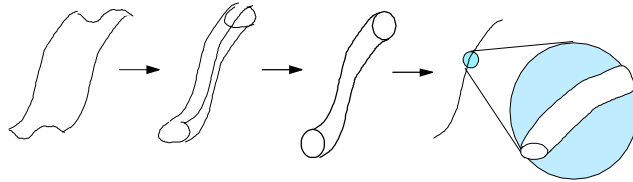


Figure 10.10 Enroulement et compactification des dimensions superflues.

La théorie Kaluza-Klein à 5 dimensions possède une propriété intéressante. Lorsqu'on compactifie la relativité générale en 5 dimensions on retrouve les équations de la relativité en 4 dimensions avec en prime, les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Des cinq nouveaux degrés de liberté indépendants introduits par la cinquième dimension, quatre servent à représenter le champ électromagnétique du photon  $A_\mu$  et le dernier est un champ scalaire appelé scalaire de Brans-Dicke. Par exemple, la métrique en cinq dimensions se transforme suivant:

$$g_{AB} \rightarrow \begin{pmatrix} & & & & A_0 \\ & & & & A_1 \\ & & g_{\mu\nu} & & A_2 \\ & & & & A_3 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \phi \end{pmatrix}$$

où  $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . La procédure peut être généralisée à un nombre arbitraire de dimensions enroulées d'où son intérêt dans le cadre des théories des cordes. Donc malgré l'introduction de 26 ou 10 dimensions d'espace-temps en théories des cordes, celles-ci peuvent être ramenées à des phénomènes physiques en 4 dimensions.

Le traitement des cordes en théorie quantique des champs est aussi très différent de celui des particules ponctuelles. Alors que dans ce dernier cas, la trajectoire est une ligne dans l'espace, la trajectoire des cordes balaie des surfaces dans l'espace (voir figure 10.11). De la même façon, les interactions représentées par des diagrammes de Feynman pour des particules ponctuelles ont la forme de surfaces (voir figure 10.12).

Les cordes fermées ont aussi une orientation gauche ou droite (hélicité) selon que leurs vibrations sont dans le sens horaire ou antihoraire et leur interactions peuvent être traitées indépendamment. Parmi les différentes classes de supercordes, la corde hétérotique est l'une des plus prometteuses. Dans ce modèles, les degrés de liberté antihoraires correspondent à ceux d'une corde bosonique, alors que les modes horaires correspondent à ceux d'une supercorde. La corde bosonique qui à l'origine est introduite en 26 dimen-

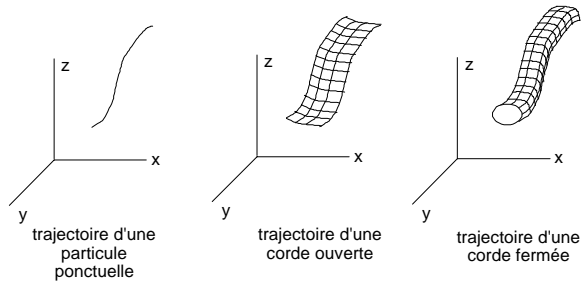


Figure 10.11 Trajectoire balayée par une particule dans l'espace.

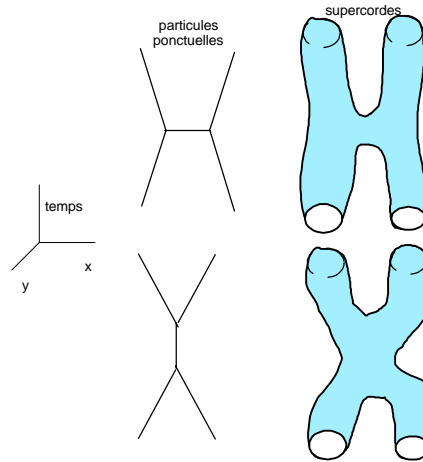


Figure 10.12 Exemples d'interaction entre cordes.

sions subit une compactification de 16 de ces dimensions pour venir se juxtaposer aux supercordes en 10 dimensions. La compactification impose des contraintes si bien qu'en 10 dimensions, la corde hétérotique possède les symétries de jauge  $SO(32)$  ou  $E_8 \otimes E_8$ .

Une des propriétés remarquables des théories de cordes est qu'elles permettent une unification des couplages de jauge, même en l'absence d'un groupe unifié. Il existe un seul type d'interaction entre deux cordes fermées: deux cordes qui se joignent pour en former une seule (ou inversement une corde qui se divise pour en donner deux). C'est donc dire que toute interaction décrite par des cordes trouve son origine dans ce processus fondamental. Dans une théorie fondamentale, les interactions de jauge, gravitationnelle ou même de Yukawa, sont des manifestations de la même interaction entre cordes mais à des conditions différentes. À l'échelle caractéristique de la corde, les couplages sont unifiés et peuvent s'écrire:

$$g_1^2 k_1 = g_2^2 k_2 = g_3^2 k_3 = \frac{4\pi}{\alpha'} G_N = g_{\text{corde}}^2$$

où les coefficients  $k_i$  sont des constantes associées à la normalisation des générateurs de jauge et où l'on reconnaît la constante de Newton  $G_N$ . Le paramètre  $\alpha'$  est la tension de la corde, le seul paramètre indépendant en théorie des cordes. Par ailleurs, les constantes de couplage  $g_i$  correspondent à des champs dont la valeur physique est déterminée par leur valeur moyenne dans le vide.

Que ce soient les cordes bosoniques, la corde hétérotique ou les supercordes typiquement formulées en 26 ou 10 dimensions, ces théories doivent être ramenées à 4 dimensions en utilisant des techniques de compactification diverses (e.g. compactification sur des variétés de Calabi-Yau, sur des orbifolds, *etc...*) ou encore par construction explicite en quatre dimensions. Il existe toutefois une multitude de façon d'y arriver. Par ailleurs, des nombreuses contraintes s'appliquent. Pour être viable, un modèle basé sur les cordes doit:

- (a) englober le groupe  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  du modèle standard,
- (b) contenir les trois générations de fermions chiraux que sont les quarks et leptons,
- (c) prédire une durée de vie du proton,
- (d) l'angle de Weinberg
- (e) l'échelle de brisure électrofaible en accord avec les limites expérimentales,
- (f) limiter les courants neutres à changement de saveur,
- (g) inclure un mécanisme de brisure de supersymétrie réaliste,
- (h) prédire la violation  $\mathcal{CP}$  dans les interactions faibles, mais sa conservation dans les interactions fortes et électromagnétiques
- (i) *etc...*

Le défi est de taille: trouver parmi toutes les possibilités, *la théorie* des cordes qui répond à ces contraintes en supposant qu'il en existe une et une seule. Une telle étude exhaustive manque pour le moment mais suivant une approche plus pragmatique il est déjà possible d'examiner des modèles existants ce qui révèle de nouvelles perspectives sur la phénoménologie à basse énergie du modèle standard. Tous ces modèles contiennent typiquement des particules supplémentaires (des leptons et des quarks lourds, des bosons de jauge exotiques, *etc.*). Parmi les mieux connus, il y a la théorie des cordes hétérotiques  $E_8 \otimes E_8$  qui mène dans les limites à basse énergie à deux cas intéressants, les modèles basés sur les groupes  $E_6$  et  $SU(5) \otimes U(1)$  respectivement.

Modèle  $E_6$

Le modèle  $E_6$  se distingue par la possibilité d'inclure chaque génération de fermions du modèle standard dans la représentation fondamentale **27**. Mais le modèle prédit aussi des champs fermioniques additionnels. En termes des sous-groupes  $SO(10)$  et  $SU(5)$  de  $E_6$ , la représentation **27** se décompose de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{27} &= \mathbf{16} + \mathbf{10} + \mathbf{1} \quad \text{de } SO(10) \\ &= (\mathbf{10} + \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{1}) + (\mathbf{5} + \bar{\mathbf{5}}) + \mathbf{1} \quad \text{de } SU(5) \end{aligned}$$

La représentation **16** de  $SO(10)$  contient les champs conventionnels du modèle standard et un neutrino droit supplémentaire. Les représentations  $\mathbf{10} + \mathbf{1}$  de  $SO(10)$  introduisent des champs supplémentaires ou "exotiques". Le contenu précis pour la première génération se lit:

$$\mathbf{27} = (u^c, e^+, u, d; d^c, e^-, \nu_e; \nu_e^c) + (D^c, H; D, H^c) + (N)$$

où les champs  $H$  sont les superpartenaires des doublets de Higgs, le champ  $N$ , un nouveau lepton neutre massif, et les champs  $D, D^c$ , des partenaires colorés des doublets de Higgs. Ces derniers sont des leptarquarks ( $B = \frac{1}{3}, L = -1$ ) ou des diquarks ( $B = \frac{2}{3}, L = 0$ ).



Modèle  $SU(5) \otimes U(1)$

À cause de la structure inversée de son contenu fermionique par rapport au modèle grandement unifié basé sur  $SU(5)$ , on réfère à ce modèle comme au "modèle  $SU(5)$  inversé". Les fermions sont identifiés par les représentations  $\mathbf{10} + \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{1}$  comme suit:

$$\bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} u_1^c \\ u_2^c \\ u_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad \mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & d_3^c & -d_2^c & d_1 & u_1 \\ -d_3^c & 0 & d_1^c & d_2 & u_2 \\ d_2^c & -d_1^c & 0 & d_3 & u_3 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 & \nu_e^c \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & -\nu_e^c & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = (e^+)$$

Contrairement au modèle  $SU(5)$ , ce modèle prédit l'existence de neutrinos de chiralité droite, et donc des neutrinos massifs. Les champs de jauge sont au nombre de 25 dont 24 provenant de la représentation adjointe de  $SU(5)$  et un provenant de  $U(1)$ . Les champs de Higgs assurant la brisure de symétrie  $SU(5) \otimes U(1) \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  et la brisure de symétrie électrofaible sont aussi prédits mais parmi les nouvelles particules, on note la présence de leptarquarks scalaires dans le secteur de Higgs et de leptarquarks vectoriels dans le secteur de jauge.

Le tableau suivant résume les succès et lacunes des supercordes:

En faveur 	Contre 
Absence de divergence ultraviolette Meilleure candidat pour la théorie d'unification des quatre forces fondamentales.	Aucune évidence expérimentale Difficile de trouver quel processus de compactification et brisure de symétrie mène au modèle standard.

La recherche sur les supercordes est toujours très active et très prolifique. Elle a permis de développer les théories conformes, de trouver des relations avec les groupes quantiques et les modèles intégrables en 2D en matière condensée (e.g. modèle de Ising). Plus récemment, un lien de dualité entre les différentes théories des cordes suggère que

celles-ci pourraient être des manifestations d'une seule théorie qui les chapeauterait, la M-théorie (M faisant allusion à des membranes). Dans une autre direction, d'autres travaux ont par ailleurs révélé que l'échelle caractéristique des cordes pourrait être beaucoup plus près de la masse du  $W^\pm$  que de la masse de Planck.

Malgré la compréhension beaucoup complète qu'on en a de nos jours et les progrès récents, la question suivante se pose toujours:

*Qu'est-ce qu'une particule élémentaire?*



# Annexe A: Références

## Manuels de références complémentaires

Les notes sont assez complètes mais les volumes suivants peuvent être utilisés à titre complémentaire.

 **Introduction to high energy physics, 3<sup>e</sup> édition, D.H. Perkins, Addison-Wesley (1987).**

Couvre presque toute la matière du cours à un niveau équivalent, sauf l'astrophysique des particules. Emphase plus marquée sur le côté expérimental.

 **Particle Physics, 2<sup>e</sup> édition, B.R. Martin and G. Shaw, Wiley.**

Couvre presque toute la matière du cours à un niveau équivalent, sauf l'astrophysique des particules. Emphase plus marquée sur le côté expérimental. Beaucoup d'exercices avec solutionnaire. Utilise quelques notions de théorie des champs ce qui dépasse donc le cadre de ce cours.

 **Introduction à la physique des particule, R. Nataf, Masson (1988).**

Couvre en partie la matière du cours à un niveau équivalent. Utilise quelques notions de théorie des champs ce qui dépasse donc le cadre de ce cours.

 **A modern introduction to particle physics, Fayyazuddin et Riazuddin, World-Scientific (1992).**

La première partie du livre couvre en partie la matière du cours à un niveau équivalent mais la deuxième partie est nettement de niveau plus avancé. S'adresse plus à l'étudiant qui prévoit poursuivre ses études graduées en physique des particules.

 **Nuclear and Particle Physics, W.S.C. Williams, Oxford.**

Couvre presque toute la matière du cours mêlée à la physique nucléaire dont c'est le principal sujet. Niveau un peu élevé plus que requis.

 **Quarks and Leptons, F. Halzen and A.D. Martin, Wiley.**

Excellent ouvrage d'introduction à la physique des particules pour étudiants gradués mais en général de niveau trop élevé pour le cadre du cours.

 **Modern Physics, K. Krane, Wiley.**

Traite surtout de théorie quantique élémentaire.

**Introductory Nuclear Physics, K. Krane, Wiley.**

Traite surtout de physique nucléaire.

**QED - The Strange Theory of Light and Matter R.P. Feynman, Penguin.**

Excellent traitement de l'électrodynamique quantique sans trop de mathématiques.

**The New Physics, éd.par P. Davis, Cambridge.**

Excellent recueil d'article sur la physique contemporaine.

**The Big Bang, J. Silk, Freeman.**

et

**A Brief History of Time, S.W. Hawking, Bantam Press.**

Des lectures portant sur la cosmologie.

## Ressources sur internet

Il existe par ailleurs beaucoup de ressources sur internet. L'évolution fulgurante d'internet a aussi pour conséquence son caractère temporaire si bien qu'il est impossible de garantir que les sites suivants seront toujours présents dans quelques mois. Malgré cet inconvénient, le lecteur est invité les consulter et à naviguer sur le *web* où il risque de s'ajouter encore plus de renseignements pertinente au fil des ans.

### Notes de cours:



**Elementary Particle Physics Lectures, S.L.Lloyd, Queen Mary and Westfield College, London** → <http://hepwww.ph.qmw.ac.uk/epp/lectures.html>



**Nuclear and Particle Physics, N. Walet, UMIST, Manchester, U.K** → <http://walet.phy.umist.ac.uk/P615/Notes/Notes.html>

### Documents pédagogiques:



**L'aventure des particules, A. Erzberger, M. Barnett et H. Quinn, Lawrence Berkeley Laboratory** (traduit par C. Augier, H. Kérec et C. Helft (LAL - France)) → <http://www.lal.in2p3.fr/CPEP/adventure.html>



**The Particle Adventure, A. Erzberger, M. Barnett et H. Quinn, Lawrence Berkeley Laboratory.**(version anglaise du lien précédent) → <http://ParticuleAdventure.org>



**SUPERSTRINGS! , J.M. Pierre, Department of Physics, University of California, Santa Barbara** → <http://www.physics.ucsb.edu/~jpierre/strings/>



**Particle Physics UK from PPARC (Particle Physics and Astronomy Research Council)** → <http://hepweb.rl.ac.uk/ppUK>



**Big Bang Science, Rutherford Appleton Laboratory** → <http://hepwww.rl.ac.uk/pub/bigbang/part1.html>





**The Science of Particle Physics at Fermilab.** → [http://www.fnal.gov/pub/hep\\_descript.htm](http://www.fnal.gov/pub/hep_descript.htm)

## Laboratoires et organisations:



**CERN (Centre européen de recherche nucléaire)**, Genève, Suisse est le site du collisionneur  $e^+e^-$ , le **LEP** (Large Electron Positron collider) et du futur collisionneur  $p\bar{p}$ , le **LHC** (Large Hadron Collider) → <http://www.cern.ch>



**Fermilab (Fermi National Accelerator Laboratory)**, Chicago, USA est le site du collisionneur  $p\bar{p}$ , le **Tevatron**. → <http://www.fnal.gov>



**DESY (Deutches Elektronen Synchrotron Laboratory)**, Hambourg, Allemagne est le site du collisionneur  $ep$ , **HERA** → <http://www.desy.de>



**SLAC (Stanford Linear Accelerator Laboratory)**, Californie, USA est le site du collisionneur  $e^+e^-$ , le **SLC** et de la manufacture de mésons  $B$ , **BaBar** → <http://heplibw3.slac.stanford.edu>



**Particle Data Group** constitue la banque de données la plus complète sur les résultats expérimentaux tels que les tableaux de particules et leurs propriétés, etc... → <http://pdg.lbl.gov/LBL>



**Autres laboratoires** → <http://www.cern.ch/Physics/HEPhtml>

## Expériences majeures:

Sur les sites internet suivants, on retrouve une description des éléments des expériences en cours (ou projetées) notamment les détecteurs, la physique étudiée, des résultats obtenus, des images d'événements reconstruits certains même en temps réel. Ces expériences sont montées par des grandes collaborations internationales de chercheurs. Expériences du collisionneur  $e^+e^-$ , le **LEP** (Large Electron Positron collider), au CERN:



**ALEPH** → <http://alephwww.cern.ch/Public.html>



**DELPHI** → <http://www.cern.ch/Delphi/Welcome.html>



**L3** → <http://hpl3sn02.cern.ch>



**OPAL** → <http://www.cern.ch/Opal>

Expériences du collisionneur  $ep$ , **HERA**, à DESY:



**H1** → <http://www-h1.desy.de/80/>



**ZEUS** → <http://www-zeus.desy.de>

Expériences du collisionneur  $p\bar{p}$ , le **Tevatron**, au Fermilab:



**CDF** → <http://www-cdf.fnal.gov>



**D0** → <http://www-d0.fnal.gov/>

Futures expériences du collisionneur  $p\bar{p}$  du **LHC** (Large Hadron Collider), au CERN:



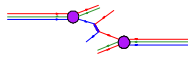
**ATLAS** → <http://atlasinfo.cern.ch/Atlas/Welcome.html>



**CMS** → <http://cmsinfo.cern.ch/cmsinfo/Welcome.html>  
et manufacture de  $B$  au collisionneur  $e^+e^-$  du **SLAC**:



**BaBar** → <http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/>



## Annexe B: Prix Nobel de physique

Année	Nom <sup>1</sup>	Pays
1901	W.C. Röntgen	Allemagne
1902	H.A. Lorentz	Pays-Bas (Hollande)
	P. Zeeman	Pays-Bas
1903	H. Becquerel	France
	M. Curie	France
	P. Curie	France
1904	J.W.S. Rayleigh	Grande-Bretagne
1905	P. Lenard	Allemagne
1906	J.J. Thomson	Grande-Bretagne
1907	A.A. Michelson	États-Unis
1908	G. Lippmann	France
1909	G. Marconi	Italie
	K.F. Braun	Allemagne
1910	J.D. Van der Waals	Pays-Bas
1911	W. Wien	Allemagne
1912	G. Dalén	Suède
1913	H. Kamerlingh Onnes	Pays-Bas
1914	M. von Laue	Allemagne
1915	W.H. Bragg	Grande-Bretagne
	W.L. Bragg	Grande-Bretagne
1916	non attribué	
1917	C.G. Barkla	Grande-Bretagne
1918	M. Planck	Allemagne
1919	J. Stark	Allemagne
1920	C.E. Guillaume	Suisse
1921	A. Einstein	Allemagne
1922	N. Bohr	Danemark
1923	R.A. Millikan	États-Unis
1924	K.M.G. Siegbahn	Suède
1925	J. Franck	Allemagne
	G. Hertz	Allemagne
1926	J. Perrin	France
1927	A.H. Compton	États-Unis
	C.T.R. Wilson	Grande-Bretagne
1928	O.W. Richardson	Grande-Bretagne

<sup>1</sup> Les prix Nobel pertinents à la physique des particules sont dénotés en bleu.

Année	Nom	Pays
1929	<i>L.V. de Broglie</i>	<i>France</i>
	<i>R. Feynman</i>	<i>États-Unis</i>
1930	<i>C.V. Raman</i>	<i>Inde</i>
1931	<i>non attribué</i>	
1932	<i>W. Heisenberg</i>	<i>Autriche</i>
1933	<i>E. Schrödinger</i>	<i>Autriche</i>
	<i>P.A.M. Dirac</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1934	<i>non attribué</i>	
1935	<i>J. Chadwick</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1936	<i>V.F. Hess</i>	<i>Autriche</i>
	<i>C.D. Anderson</i>	<i>États-Unis</i>
1937	<i>C.J. Davison</i>	<i>États-Unis</i>
1927	<i>G.P. Thomson</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1938	<i>E. Fermi</i>	<i>Italie</i>
1939	<i>E.O. Lawrence</i>	<i>États-Unis</i>
1940	<i>non attribué</i>	
1941	<i>non attribué</i>	
1942	<i>non attribué</i>	
1943	<i>O. Stern</i>	<i>États-Unis</i>
1944	<i>I.I. Rabi</i>	<i>États-Unis</i>
1945	<i>W. Pauli</i>	<i>Suisse</i>
1946	<i>P.W. Bridgman</i>	<i>États-Unis</i>
1947	<i>E.V. Appleton</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1948	<i>P.M.S. Blackett</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1949	<i>Yukawa Hideki</i>	<i>Japon</i>
1950	<i>C.F. Powell</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
1951	<i>J.D. Cockcroft</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
	<i>E.T.S. Walton</i>	<i>Irlande</i>
1952	<i>F Bloch</i>	<i>États-Unis</i>
	<i>E.M. Purcell</i>	<i>États-Unis</i>
1953	<i>F Zernike</i>	<i>Pays-Bas</i>
1954	<i>M. Born</i>	<i>Grande-Bretagne</i>
	<i>W. Bothe</i>	<i>Rép. féd. d'Allemagne</i>
1955	<i>W.E. Lamb</i>	<i>États-Unis</i>
	<i>P. Kusch</i>	<i>États-Unis</i>
1956	<i>W. Shockley</i>	<i>États-Unis</i>
	<i>J. Bardeen</i>	<i>États-Unis</i>
	<i>W.H. Brattain</i>	<i>États-Unis</i>
1957	<i>C.N. Yang</i>	<i>Chine et États-Unis</i>
	<i>T.D. Lee</i>	<i>Chine et États-Unis</i>
1958	<i>P.A. Tcherenkov</i>	<i>U.R.S.S.</i>
	<i>I.M. Frank</i>	<i>U.R.S.S.</i>
	<i>I.E. Tamm</i>	<i>U.R.S.S.</i>
1959	<i>E. Segrè</i>	<i>États-Unis</i>
	<i>O. Chamberlain</i>	<i>États-Unis</i>

Année	Nom	Pays
1960	D.A. Glaser	États-Unis
1961	R. Hofstadter	États-Unis
	R. Mössbauer	Rép. féd. d'Allemagne
<b>1962</b>	L. Landau	U.R.S.S.
1963	E. Wigner	États-Unis
	M. Goeppert-Mayer	États-Unis
	J. Hans D. Jensen	États-Unis
<b>1964</b>	Ch. H. Townes	États-Unis
	N.G. Bassov	U.R.S.S.
	A.M. Prokhorov	U.R.S.S.
1965	Tomonoga Shinichirō	Japon
	J. Schwinger	États-Unis
	R. Feynman	États-Unis
<b>1966</b>	A. Kastler	France
1967	H. Bethe	États-Unis
1968	L. Alvarez	États-Unis
1969	M. Gell-Mann	États-Unis
<b>1970</b>	H. Alfvén	Suède
	L. Néel	France
<b>1971</b>	D. Gabor	Grande-Bretagne
<b>1972</b>	J. Bardeen	États-Unis
	L. Cooper	États-Unis
	J. Schrieffer	États-Unis
<b>1973</b>	Esaki Leo	Japon
	I. Giaever	États-Unis
	B.D. Josephson	Grande-Bretagne
<b>1974</b>	M. Ryle	Grande-Bretagne
	A. Hewish	Grande-Bretagne
1975	J. Rainwater	États-Unis
	A. Bohr	Danemark
	M. Mottelson	Danemark
1976	B. Richter	États-Unis
	S. Ting	États-Unis
<b>1977</b>	P. Anderson	États-Unis
	N. Mott	Grande-Bretagne
	J.H. Van Vleck	États-Unis
<b>1978</b>	P.L. Kapitsa	U.R.S.S.
	A.A. Penzias	États-Unis
	R.W. Wilson	Grande-Bretagne
1979	S. Glashow	États-Unis
	A. Salam	Pakistan
	S. Weinberg	États-Unis

Année	Nom	Pays
1980	J.W. Cronin	États-Unis
	V.L. Fitch	États-Unis
1981	N. Bloembergen	États-Unis
	A.L. Schawlow	États-Unis
	K.M. Siegbahn	Suède
1982	K.G. Wilson	États-Unis
1983	S. Chandrasekhar	États-Unis
	W.A. Fowler	États-Unis
1984	C. Rubbia	Italie
	S. Van der Meer	Pays-bas
1985	K. von Klitzing	Rép. féd. d'Allemagne
1986	G. Binnig	Rép. féd. d'Allemagne
	H. Rohrer	Suisse
	E. Ruska	Rép. féd. d'Allemagne
1987	J.G. Bednorz	Rép. féd. d'Allemagne
	K.A. Müller	Suisse
1988	L. Lederman	États-Unis
	M. Schwartz	États-Unis
	J. Steinberger	États-Unis
1989	H.G. Dehmelt	États-Unis
	W. Paul	Rép. féd. d'Allemagne
	N.F. Ramsey	États-Unis
1990	J.I. Friedman	États-Unis
	H.W. Kendall	États-Unis
	R.E. Taylor	Canada
1991	P.-G. de Gennes	France
1992	G. Charpak	France
1993	R.A. Hulse	États-Unis
	J.H. Taylor	États-Unis
1994	B.N. Brockhouse	Canada
	C.G. Shull	États-Unis
1995	M.L. Perl	États-Unis
	F. Reines	États-Unis
1996	D.M. Lee	États-Unis
	D.D. Osheroff	États-Unis
	R.C. Richardson	États-Unis
1997	S. Chu	États-Unis
	C. Cohen-Tannoudji	France
	W.D. Phillips	États-Unis
1998	Robert B. Laughlin	États-Unis
	Horst L. Stormer	Allemagne
	Daniel C. Tsui	Chine
1999	Martinus Veltman	Pays-Bas
	Gerardus t'Hooft	Pays-Bas



# Annexe C: Notation, conventions, constantes de physiques

## C.1 Notations

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs à trois dimensions sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots$$

alors que les quadri-vecteurs sont notés par

$$x, p, \dots$$

ou par leur composantes contravariantes

$$x^\mu, p^\mu, \dots$$

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

### Alphabet Grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation	Majuscule	Minuscule	Prononciation
<i>A</i>	$\alpha$	alpha	<i>N</i>	$\nu$	nu
<i>B</i>	$\beta$	bêta	$\Xi$	$\xi$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	<i>O</i>	$o$	omicron
$\Delta$	$\delta$	delta	$\Pi$	$\pi$	pi
<i>E</i>	$\epsilon, \varepsilon$	epsilon	<i>P</i>	$\rho$	rho
<i>Z</i>	$\zeta$	zeta	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
<i>H</i>	$\eta$	eta	<i>T</i>	$\tau$	tau
$\Theta$	$\theta, \vartheta$	theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	upsilon
<i>I</i>	$\iota$	iota	$\Phi$	$\phi, \varphi$	phi
<i>K</i>	$\kappa$	kappa	$\Psi$	$\psi$	psi
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	<i>X</i>	$\chi$	chi
<i>M</i>	$\mu$	mu	$\Omega$	$\omega, \varpi$	omega

## C.2 Constantes fondamentales en physique

## Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière (vide)	$c$	$2.99792458 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$1.25664 \times 10^{-6} \text{NA}^{-2}$
Permittivité du vide ( $1/\mu_0 c^2$ )	$\epsilon_0$	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$
Constante gravitationnelle	$G, \kappa$	$6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h$	$6.6260755 \times 10^{-34} \text{Js}$
en électron volts		$4.135669 \times 10^{-15} \text{eVs}$
$h/2\pi$	$\hbar$	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{Js}$
en électron volts		$6.5821220 \times 10^{-16} \text{eVs}$
Masse de Planck ( $(\hbar c/G)^{\frac{1}{2}}$ )	$m_P$	$2.17671 \times 10^{-8} \text{kg}$
Longueur de Planck ( $(\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}}$ )	$l_P$	$1.61605 \times 10^{-35} \text{m}$
Temps de Planck ( $(\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}}$ )	$t_P$	$5.39056 \times 10^{-44} \text{s}$

## Constantes électromagnétiques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge de l'électron	$e$	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$
Rapport $e$ sur $h$	$e/h$	$2.41798836 \times 10^{14} \text{AJ}^{-1}$
Quantum de flux magnétique ( $h/2e$ )	$\Phi_0$	$2.06783461 \times 10^{-15} \text{Wb}$
Ratio fréquence-voltage Josephson	$2e/h$	$4.8359767 \times 10^{14} \text{HzV}^{-1}$
Conductance Hall quantique	$e^2/h$	$3.87404614 \times 10^{-5} \text{S}$
Résistance Hall quantique ( $\mu_0 c/2\alpha_{em}$ )	$R_H$	$25812.8056 \Omega$
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9.2740154 \times 10^{-24} \text{JT}^{-1}$
en électron volts		$5.78838263 \times 10^{-5} \text{eVT}^{-1}$
Magnéton nucléaire (1 nm)	$\mu_N$	$5.0507866 \times 10^{-27} \text{JT}^{-1}$
en électron volts		$3.15245166 \times 10^{-8} \text{eVT}^{-1}$

## Constantes atomiques

Quantité	Symbole	Valeur
Structure fine ( $\mu_0 c e^2/2h$ )	$\alpha_{em}$	$7.29735308 \times 10^{-3}$
	$\alpha_{em}^{-1}$	137.0359895
Constante de Rydberg	$R_\infty$	$1.0973731534 \times 10^7 \text{m}^{-1}$
en hertz		$3.2898419499 \times 10^{15} \text{Hz}$
en joules		$2.1798741 \times 10^{-18} \text{J}$
en électron volts		13.6056981eV
Rayon de Bohr ( $\alpha_{em}/4\pi R_\infty$ )	$a_0$	$0.529177249 \times 10^{-10} \text{m}$
Énergie de Hartree	$E_h$	$4.3597482 \times 10^{-18} \text{J}$
en électron volts		27.2113961eV
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3.63694807 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$
	$h/m_e$	$7.27389614 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$



## Constantes physico-chimique

Quantité	Symbole	Valeur
Nombre d'Avogadro	$N_A$	$6.0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro		$10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Unité de masse atomique ( $\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$ ) en électron volts ( $m_u c^2 / \{e\}$ )	$m_u$	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $931.49432 \text{ MeV}$
Constante de Faraday	$F$	$96485.309 \text{ C mol}^{-1}$
Constante de Planck molaire	$N_A h$	$3.99031323 \times 10^{-10} \text{ J s mol}^{-1}$
	$N_A h c$	$0.11962658 \text{ J mmol}^{-1}$
Constant des gaz	$R$	$8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k$	$1.380658 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
en électron volts		$8.617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
en hertz		$2.083674 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$
Volume molaire (gaz parfait) <sup>2</sup>	$V_m$	$22.41410 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Loschmidt <sup>3</sup>	$n_0$	$2.686763 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Constante de Loschmidt <sup>4</sup>	$V_m$	$22.71108 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Sackur-Tetrode <sup>5</sup>	$S_0/R$	$-1.151693$
Constante de Sackur-Tetrode <sup>6</sup>		$-1.164856$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5.67051 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de radiation primaire	$c_1$	$3.7417749 \times 10^{-16} \text{ W m}^2$
Constante de radiation secondaire	$c_2$	$0.01438769 \text{ m K}$
Constante de Wien	$b$	$2.897756 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Constante de Coulomb	$k_0$	$8.98755 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$
Constante de perméabilité	$\mu_0/4\pi$	$10^{-7} \text{ T mA}^{-1}$

## C.3 Unités SI

Les lettres SI désignent le Système International d'unités. Il s'agit d'un système d'unités cohérentes approuvés internationalement qui est en usage dans plusieurs pays et utilisé de façon systématique pour les ouvrages scientifiques et techniques. Le système SI, basé sur les unités MKS, remplace les systèmes CGS et f.p.s. (Système Impérial). On peut diviser les unités SI en trois groupes: les unités de base, supplémentaires et dérivées. Il y a sept unités de base qui sont dimensionnellement indépendantes.

### Unités de base SI

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbole</i>
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

<sup>2</sup>  $T = 273.15 \text{ K}, p = 101325 \text{ Pa}$

<sup>3</sup>  $T = 273.15 \text{ K}, p = 101325 \text{ Pa}$

<sup>4</sup>  $T = 273.15 \text{ K}, p = 100 \text{ kPa}$

<sup>5</sup>  $p_0 = 100 \text{ kPa}$

<sup>6</sup>  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

**Unités supplémentaires SI**

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbole</i>
angle plan	radian	rad
angle solide	stéradian	sr

**Unités dérivés SI**

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbole</i>	<i>Unités SI</i>
fréquence	hertz	Hz	s <sup>-1</sup>
énergie	joule	J	N · m
force	newton	N	kg · m · s <sup>-2</sup>
puissance	watt	W	J · s <sup>-1</sup>
pression	pascal	Pa	N · m <sup>-2</sup>
charge électrique	coulomb	C	A · s
différence de potentiel électrique	volt	V	W · A <sup>-1</sup>
résistance électrique	ohm	Ω	V · A <sup>-1</sup>
conductance électrique	siemens	S	A · V <sup>-1</sup>
capacité électrique	farad	F	C · V <sup>-1</sup>
flux magnétique	weber	Wb	V · s
inductance	henry	H	Wb · A <sup>-1</sup>
induction magnétique	tesla	T	Wb · m <sup>-2</sup>
flux lumineux	lumen	lm	cd · sr
illumination	lux	lx	lm · m <sup>-2</sup>
activité	becquerel	Bq	s <sup>-1</sup>
dose absorbée	gray	Gy	J · kg <sup>-1</sup>
dose équivalente	sievert	Sv	J · kg <sup>-1</sup>

Les unités SI sont étendues grâce à des préfixes qui désignent les multiples ou fractions décimales des unités.

**Préfixes utilisés avec unités SI**

<i>Nom du Facteur</i>			<i>Nom du Facteur</i>		
<i>Facteur</i>	<i>Préfixe</i>	<i>Symbole</i>	<i>Facteur</i>	<i>Préfixe</i>	<i>Symbole</i>
10	déca-	da	10 <sup>-1</sup>	déci-	d
10 <sup>2</sup>	hecto-	h	10 <sup>-2</sup>	centi-	c
10 <sup>3</sup>	kilo-	k	10 <sup>-3</sup>	milli-	m
10 <sup>6</sup>	méga-	M	10 <sup>-6</sup>	micro-	μ
10 <sup>9</sup>	giga-	G	10 <sup>-9</sup>	nano-	n
10 <sup>12</sup>	tera-	T	10 <sup>-12</sup>	pico-	p
10 <sup>15</sup>	peta-	P	10 <sup>-15</sup>	femto-	f
10 <sup>18</sup>	exa-	E	10 <sup>-18</sup>	atto-	a

## C.4 Unités naturelles

Les unités naturelles (UN) sont définies de façon à ce que les constantes fondamentales que sont la constante de Planck et la vitesse de la lumière soient

$$\hbar = 1$$

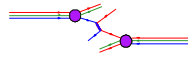
$$c = 1.$$

Elles sont utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou qui impliquent des effets quantiques mesurables. Une quantité dans les unités SI (système internationale) qui possède des dimensions

$$M^p L^q T^r$$

ou  $M$ ,  $L$  et  $T$  représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des unités d'énergie à la puissance  $p - q - r$ , soit  $E^{p-q-r}$ .

Quantité	SI			UN
	$p$	$q$	$r$	$n$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine $\alpha_{em}$	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2



# C.5 Coefficients de Clebsh-Gordan

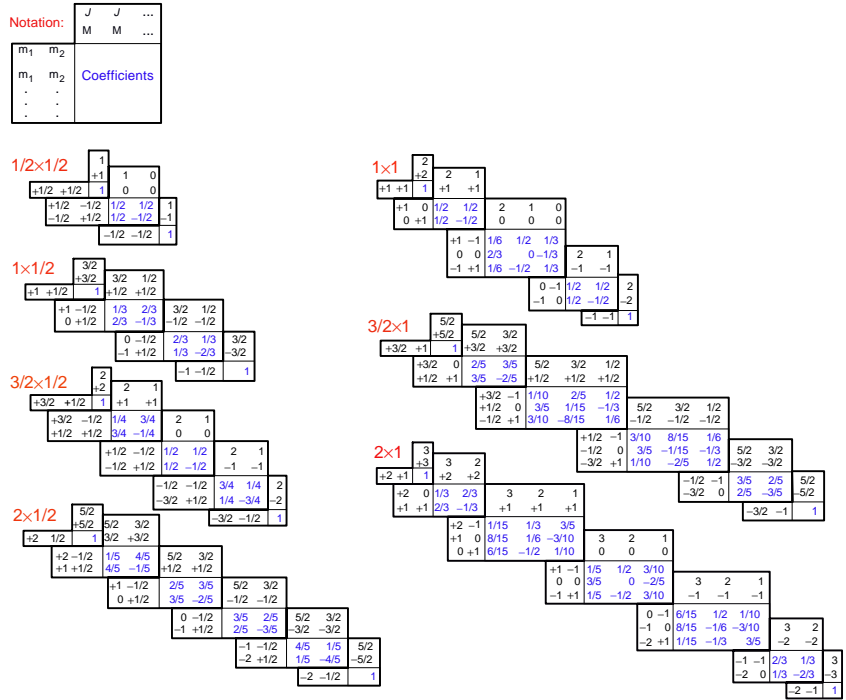


Figure 10.1 Coefficients de Clebsh-Gordan. Note: Un radical est sous-entendu dans les tables de coefficients, e.g.  $-\frac{8}{15}$  doit se lire  $-\sqrt{\frac{8}{15}}$ .

# Annexe D: Rappel de relativité restreinte et cinématique relativiste

## D.1 La relativité restreinte

Les deux principes sur lesquels repose la relativité sont:

**Postulat 10.1** *Le principe de relativité: les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.*

**Postulat 10.2** *Universalité de la vitesse de la lumière: la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.*

### L'intervalle

Considérons deux événements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  reliés par un rayon lumineux. Dans un référentiel  $S$ , on a  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  et  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Ces quantités satisfont la relation:

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0 \quad (\text{D.1})$$

puisque  $c = 1$ . En raison de l'universalité de  $c$ , on a aussi dans un second référentiel  $S'$ :

$$-(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = 0. \quad (\text{D.2})$$

Plus généralement, pour deux événements quelconques séparés dans l'espace de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  et dans le temps de  $\Delta t$ , on appelle intervalle entre ces événements la quantité:

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (\text{D.3})$$

En relation avec ce que l'on vient tout juste de voir, on constate que si  $\Delta s^2$  est nul pour deux événements donnés,  $\Delta s^2$  est également nul. Il y a en fait une invariance de l'intervalle lors d'un passage des coordonnées de  $S(t, x, y, z)$  aux coordonnées de  $S'(t', x', y', z')$ :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (\text{D.4})$$

## Classification des événements et causalité

Comme la quantité  $(\Delta s)^2$  entre deux événements est indépendante des observateurs, on peut s'en servir pour classer les événements l'un par rapport à l'autre. Si l'intervalle entre deux événements ( $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$ ) est positif, on dira qu'il est du *genre-espace*; si l'intervalle est négatif ( $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}$ ), on dira qu'il est du *genre-temps* alors que s'il est nul, on le dira du *genre-lumière*. Par rapport à un événement donné  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le *passé absolu* de  $\mathcal{E}$ ; ceux du cône supérieur, le *futur absolu* de  $\mathcal{E}$  (événements du *genre-temps*). Ceux qui sont à l'extérieur du cône constituent l'*ailleurs* de  $\mathcal{E}$  (événements du *genre-espace*) (voir figure 10.1).

$$(\Delta s)^2 > 0 \quad ; \quad \text{genre - espace}$$

$$(\Delta s)^2 < 0 \quad ; \quad \text{genre - temps}$$

$$(\Delta s)^2 = 0 \quad ; \quad \text{genre - lumière}$$

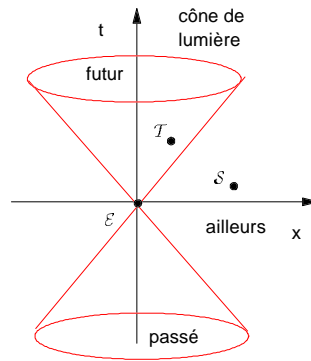


Figure 10.1 Relation de causalité entre les événements.

On voit donc que chaque événement a son passé, son futur et son ailleurs. Quant au présent, il n'existe à toutes fins pratiques qu'en un point. Cette façon de voir est radicalement différente de celle qui avait prévalu jusqu'en 1905 où le temps était quelque chose d'absolu.

On peut aisément admettre que l'événement  $\mathcal{S}$  de la figure 10.1 ne peut être l'effet de l'événement  $\mathcal{E}$  car la distance (selon  $Ox$ ) est trop grande pour qu'un rayon lumineux ait pu connecter ces deux événements. Il en est de même pour tous les événements de l'ailleurs de  $\mathcal{E}$ ; ainsi l'événement  $\mathcal{E}$  ne peut être l'effet d'aucun événement situé dans l'ailleurs-passé.

Par contre, une relation de causalité est possible entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}$  qui est dans le *futur absolu* de  $\mathcal{E}$ . En effet, il est possible qu'un rayon lumineux ou qu'un signal moins rapide ait connecté ces deux événements, ce qui veut dire que  $\mathcal{E}$  pourrait être la cause de  $\mathcal{T}$ . De même  $\mathcal{E}$  peut être l'effet de tout événement faisant partie de son passé absolu.

## D.2 Cinématique relativiste

## Transformations de Lorentz

L'invariance de la vitesse signifie notamment qu'un front d'onde émanant d'une source lumineuse ponctuelle demeure sphérique dans tous les repères en mouvement relatif uniforme (voir figure 10.2). Nous choisissons d'identifier l'axe des  $z$  à la direction de la direction de la vitesse relative entre les référentiels  $S$  et  $S'$ . Soit des repères  $S$

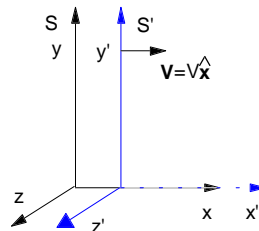


Figure 10.2 Référentiels  $S$  et  $S'$ .

et  $S'$  en mouvement relatif uniforme. Un front d'onde émis en  $t = 0$ , par une source fixe à l'origine de  $S$ , sera décrit en  $t > 0$  par un observateur du même repère par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \quad (\text{D.5})$$

Un observateur d'un repère  $S'$ , qui coïncidait avec  $S$  à  $t = 0$  mais qui se déplace uniformément par rapport à  $S$ , verra la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2. \quad (\text{D.6})$$

On peut alors déduire de cette observation la transformation de Lorentz pour les coordonnées d'espace-temps,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vz) & t &= \gamma(t' + Vz') \\ x' &= x & x &= x' \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= \gamma(z - Vt) & z &= \gamma(z' + Vt') \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

les transformations de Lorentz des vitesses,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x}{\gamma(1 - u_z V)} & u_x &= \frac{u'_x}{\gamma(1 + u'_z V)} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_z V)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_z V)} \\ u'_z &= \frac{u_z - V}{1 - u_z V} & u_z &= \frac{u'_z + V}{1 + u'_z V} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

et les transformation de Lorentz de l'énergie-impulsion,

$$\begin{aligned}
 E' &= \gamma(E - Vp_z) & E &= \gamma(E' + Vp'_z) \\
 p'_x &= p_x & p_x &= p'_x \\
 p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\
 p'_z &= \gamma(p_z - VE) & p_z &= \gamma(p'_z + VE').
 \end{aligned}
 \tag{D.9}$$

où

$$\gamma = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}.
 \tag{D.10}$$

## Formalisme quadri-dimensionnel

La similitude entre la notion de temps et d'espace suggère d'adopter un formalisme quadri-dimensionnel. En adoptant la notation covariante avec des indices  $(0, 1, 2, 3)$ , on a:

$$\begin{aligned}
 x^{0'} &= \gamma(x^0 - Vx^3) \\
 x^{1'} &= x^1 \\
 x^{2'} &= x^2 \\
 x^{3'} &= \gamma(x^3 - Vx^0)
 \end{aligned}
 \tag{D.11}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle ainsi:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.
 \tag{D.12}$$

### Remarque 10.2



La forme de la matrice de transformation s'apparente à une matrice de rotation (généralisée à un angle imaginaire). Isolons ici, les composantes  $z$  et  $t$ . Alors on peut récrire

$$\begin{aligned}
 x^{0'} &= x^0 \cosh \eta + x^3 \sinh \eta \\
 x^{3'} &= x^3 \cosh \eta - x^0 \sinh \eta
 \end{aligned}$$

où  $\eta$ , la rapidité, est définie comme

$$V \equiv \tanh \eta.
 \tag{D.13}$$

La forme matricielle qui précède

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}
 \tag{D.14}$$

où  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  est appelée matrice de transformation de Lorentz et où  $x^{\mu}$  est un quadri-vecteur

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}).
 \tag{D.15}$$

Souvent, on abrège cette notation par la notation d'Einstein

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}
 \tag{D.16}$$

où la répétition d'indice grec (e.g.  $\mu, \nu, \lambda, \sigma \dots$ ) sous-entend la somme sur des indices  $0, 1, 2, 3$ . Toutefois, la répétition d'indice latin (e.g.  $i, j, k, l \dots$ ) sous-entend la somme



sur des indices 1, 2, 3. Donc, l'expression précédente n'est pas équivalente à

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \neq \Lambda_i^{\mu} x^i \quad (\text{D.17})$$

puisque la somme dans le terme de droite ne s'effectue que sur les composantes  $i = 1, 2, 3$ .

La transformation inverse de Lorentz peut aussi s'écrire dans cette notation

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

ou encore

$$x^{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\nu}^{\mu} x^{\nu'} \quad (\text{D.19})$$

où  $\tilde{\Lambda}_{\nu}^{\mu} = (\Lambda_{\nu}^{\mu})^{-1}$ .

## Le tenseur métrique

Plus formellement, dans un espace vectoriel à  $D$  dimensions, il est possible de choisir  $D$  vecteurs de bases  $e_{\mu}$  et de représenter un vecteur  $A$  à partir de ses composantes parallèles aux  $e_{\mu}$ . Alors tout vecteur  $A$  s'écrit

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu} e_{\mu} \quad (\text{D.20})$$

où  $A^{\mu}$  sont appelées les composantes contravariantes de  $A$ . Dans un changement de système de coordonnées, comme une transformation de Lorentz, les bases deviennent

$$e^{\mu} \rightarrow e^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} e^{\nu}. \quad (\text{D.21})$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $A$  et  $B$  prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^{\mu} e_{\mu} \cdot B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (\text{D.22})$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (\text{D.23})$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs de base sont *orthogonaux*: soit,

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (\text{D.24})$$

et donc

$$A \cdot B = A^{\mu} B^{\mu} e_{\mu}^2 \quad (\text{D.25})$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisé d'un vecteur espace-temps est relié à l'intervalle, e.g.

$$\begin{aligned} x^2 &= x^{\mu} x^{\mu} e_{\mu}^2 \\ &= (x^{\mu})^2 e_{\mu}^2 \\ &= (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

alors la norme des vecteurs de base est

$$e_\mu^2 = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = 0 \\ 1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (\text{D.27})$$

est le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.28})$$

## Composantes covariantes

Les composantes covariantes sont des projections orthogonales de  $A$  sur les vecteurs de base  $e_\mu$ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (\text{D.29})$$

(à noter l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse  $g^{\mu\nu}$  coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (\text{D.30})$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (\text{D.31})$$

d'où

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (\text{D.32})$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (\text{D.33})$$

Par exemple, pour le quadri-vecteur contravariant de position

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (\text{D.34})$$

on aura un quadri-vecteur covariant de position:

$$\begin{aligned} x_\nu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^\mu \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

et donc

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \mathbf{x}) \\ x_\mu &= (x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

**Remarque 10.3**

*Toute quantité qui a la forme*

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu \quad (\text{D.37})$$

*est un invariant de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels*

Les notions d'énergie et d'impulsion sont intimement liées (tout comme l'espace et le temps). Ce lien devient évident dans la notation quadri-vectorielle (ou covariante). En relativité restreinte, il est pertinent de définir une nouvelle quantité: la quadri-vitesse  $u^\mu$ ,

$$u^\mu = \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (\text{D.38})$$

où le vecteur de position est dérivé par rapport au temps propre  $\tau$ , un invariant de Lorentz, ( $d\tau = \gamma^{-1}dt$ ).

Le quadri-vecteur impulsion est alors modélisé sur le vecteur impulsion classique:

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = \left( m_0 \frac{dt}{d\tau}, m_0 \frac{dx}{d\tau}, m_0 \frac{dy}{d\tau}, m_0 \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (\text{D.39})$$

où  $m_0$  est la masse propre. Comme  $d\tau = \gamma^{-1}dt$ , la partie spatiale de ce quadri-vecteur s'écrit:

$$p^j = \gamma m_0 (v^1, v^2, v^3) \quad (\text{D.40})$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (\text{D.41})$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de la particule dans le repère  $S$ . Par ailleurs, la composante temporelle  $p^0$  du quadri-vecteur impulsion est

$$p^0 = \gamma m_0 c = m_0 c + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (\text{D.42})$$

On reconnaît dans le deuxième terme de cette relation l'énergie cinétique habituelle. Mais qu'en est-il du premier terme qui s'écrit  $m_0 c^2$ ? Cette expression qui est devenue la formule fétiche de la relativité a été interprétée par Einstein comme étant l'énergie propre de la matière. Autrement dit, du seul fait qu'une particule a une masse  $m_0$ , elle a un contenu en énergie de grandeur  $m_0 c^2$ , lequel contenu, comme le dit Einstein peut-être mis en évidence par les émissions d'atomes lourds comme le radium.

Il s'avère que le quadri-vecteur impulsion est en fait un quadri-vecteur énergie-impulsion

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (\text{D.43})$$

où l'énergie  $E$  est l'énergie totale. Si on a besoin de l'énergie cinétique, on devra écrire

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 c^2 \\ &= (\gamma - 1) m_0 c^2 \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

ce qui signifie, en fait, que l'expression classique  $\frac{1}{2} m v^2$  n'est qu'une approximation valide pour les vitesses faibles.

Voyons maintenant quelle est la grandeur de  $p^\mu$ . On écrit donc

$$\begin{aligned} (p^\mu)^2 &= g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\
&= \gamma m_0^2 (1 - \mathbf{v}^2) \\
&= m_0^2.
\end{aligned} \tag{D.45}$$

On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \tag{D.46}$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \tag{D.47}$$

On a donc trouver un autre invariant qui s'avère très utile dans un grand nombre de calculs relativistes. En réinsérant la vitesse de la lumière  $c$ , on a

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{D.48}$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimée de façon très compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \tag{D.49}$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu \tag{D.50}$$

il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}} \tag{D.51}$$

ce qui est la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0 \tag{D.52}$$

ce qui est la conservation de l'énergie totale, qui s'écrit aussi

$$E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}}. \tag{D.53}$$

On peut aussi déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité  $P^\mu$  (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion est un invariant relativiste (même grandeur dans tous les repères). On aura donc, par exemple dans le repère du laboratoire

$$\left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 \tag{D.54}$$

mais puisqu'il s'agit d'invariant de Lorentz (relativiste), cette quantité est la même dans tous les repères. Dans un repère  $S'$  on aura

$$\left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left( P_{S'}^\mu \right)^2 = \left( P_{S'}^\mu \right)^2. \tag{D.55}$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), i.e. le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation tient toujours

$$\left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^\mu \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^\mu \right)^2. \tag{D.56}$$

on aura dans ce repère spécial,

$$\begin{aligned}
 \left( P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ avant}} \right)^2 &= \left( P_{\text{RIN}}^0 \text{ avant} \right)^2 - \left( \mathbf{P}_{\text{RIN}} \text{ avant} \right)^2 \\
 &= \left( P_{\text{RIN}}^0 \text{ avant} \right)^2 = \left( E_{\text{RIN}}^{\text{tot} \text{ avant}} \right)^2 \\
 &= \left( \sum_n E_n \right)^2 .
 \end{aligned} \tag{D.57}$$

Cette quantité correspond donc à la somme des énergies totales, élevée au carré.





# Annexe E: Équation de Dirac

Rappelons que l'équation de Klein-Gordon décrit les bosons (spin entier) se lit:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi - m^2 \psi \quad \text{ou} \quad 0 = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \psi \quad (\text{E.1})$$

Dirac propose de linéariser cette équation dans les dérivées par rapport aux coordonnées de temps et d'espace (équation différentielle du premier ordre).

La forme la plus simple (masse nulle) s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \left( \sigma_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}$$

où les  $\sigma$  sont des constantes. Pour reproduire (E.1), il suffit d'élever au carré la dernière équation de laquelle on obtient les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 &= 1 \\ \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z &= 0 \\ m &= 0 \end{aligned}$$

Les  $\sigma$  ne peuvent pas être des nombres puisqu'ils ne commutent pas. On peut toutefois les représenter par des matrices dont la dimension minimale est  $2 \times 2$ . Il s'avère que ces matrices sont les matrices de Pauli qui s'écrivent

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tel que

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si les  $\sigma$  sont des matrices  $2 \times 2$  alors la fonction d'onde  $\psi$  que l'on désigne ici sous le nom de *spinneur* doit avoir deux composantes qui représentent chacune un état de spin  $\frac{1}{2}$  ou  $-\frac{1}{2}$  :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation non linéaire de Klein-Gordon est donc remplacée par deux équations linéaires couplées.

Dans le cas le plus général où la masse n'est pas nulle, l'équation linéarisée prend la

forme

$$i\gamma_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} - i\gamma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\gamma_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\gamma_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = 0$$

ou de façon plus succincte

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{E.2})$$

où on introduit les constantes  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Élevant au carré cette dernière équation, on obtient

$$(i\gamma_\nu \partial^\nu - m) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = -(\gamma_\nu \gamma_\mu \partial^\nu \partial^\mu - m^2) \psi = 0. \quad (\text{E.3})$$

Pour coïncider avec (E.1), il est nécessaire que

$$\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$$

Ceci n'est possible que si les  $\gamma_\mu$  sont des matrices de dimensions  $4 \times 4$  ou plus. Dans leur représentation la plus simple les matrices  $\gamma_\mu$ , appelées matrices de Dirac, s'écrivent

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \\ \gamma_0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où chaque élément ici est une matrice  $2 \times 2$ . La fonction d'onde est maintenant un *bi-spinneur*  $\psi$  qui possède quatre composantes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

L'équation de Dirac décrit alors quatre équations linéaires couplées. Les matrices  $\gamma_\mu$  intègrent la notion de spin puisque qu'elles correspondent à une version généralisée des matrices de spin de Pauli. Pour cette raison, l'*équation de Dirac* convient à la description des fermions (spin demi-entier). En fait, des quatres degrés de liberté du bi-spinneur, deux servent à représenter la particule dans les états de spin  $\pm \frac{1}{2}$  et deux autres, l'antiparticule dans les états de spin  $\pm \frac{1}{2}$ .

Considérons l'opérateur de parité  $\mathcal{P}$  et son effet sur les fermions. L'équation de Dirac qui décrit la particule et l'antiparticule

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

devient sous  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(t, -\mathbf{x}) &= 0 \\ (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m) \psi(t, -\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant cette expression par  $\gamma^0$  et en utilisant la relation d'anticommutation  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  on obtient

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = 0.$$

Mais  $\gamma^0$  est en fait l'opérateur de parité pour les fonctions d'onde de Dirac, i.e.  $\gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x})$ . Plus précisément, les états d'énergie positive et de spin  $\pm \frac{1}{2}$ , et les états d'énergie



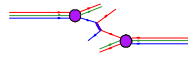
négative et de spin  $\pm\frac{1}{2}$  sont représentés par les solutions

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui se transforment sous  $\mathcal{P}$  suivant

$$\gamma^0 u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 v_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 v_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire que les fermions ont une parité positive et les antifermions, une parité négative.





# Annexe F: Particules, collisionneurs,...

**Bosons de jauge et Higgs<sup>7</sup>**

	$M$ (GeV)	$Q$	$(I^W, I_3^W)$	$J^{PC}$
$\gamma$	0	0	(0, 0)	$1^{--}$
$Z^0$	91.19	0	(1, 0)	1
$W^+$	80.33	1	(1, 1)	1
$W^-$	80.33	-1	(1, -1)	1
$g$	0	0	(0, 0)	$1^-$
$H$	> 48	0	(0, 0)	0

**Leptons**

	$M$ (MeV)	$Q$	$(L_e, L_\mu, L_\tau)$	$(I^W, I_3^W)_{R,L}$ <sup>8</sup>	$J^{PC}$
$e$	0.511	-1	(1, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$
$\nu_e$	0	0	(1, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$
$\mu$	105.66	-1	(0, 1, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$
$\nu_\mu$	0	0	(0, 1, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$
$\tau$	1777.	-1	(0, 0, 1)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$
$\nu_\tau$	0	0	(0, 0, 1)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	$\frac{1}{2}^-$

**Quarks**

	$M$ (MeV)	$Q$	$B$	$(S, C, B, T)$	$(I^W, I_3^W)_{R,L}$	$(I, I_3)^G$	$J^{PC}$
$u$	8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0, 0, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$d$	15	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0, 0, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$s$	300	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(-1, 0, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$c$	1600	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0, 1, 0, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$b$	4500	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0, 0, -1, 0)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_L$	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$t$	175000	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0, 0, 0, 1)	$(0, 0)_R, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_L$	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$

<sup>7</sup> Notation:

$Q$  = charge électrique     $B$  = # baryonique     $T$  = top  
 $L_e$  = # électronique     $S$  = étrangeté     $(I^W, I_3^W)$  = (isospin faible)  
 $L_\mu$  = # muonique     $C$  = charme     $(I, I_3)^G$  = (isospin fort)<sup>Parité<sup>G</sup></sup>  
 $L_\tau$  = # tauonique     $\tilde{B}$  = bottom     $J^{PC}$  = Spin<sup>Parité, Parité<sup>C</sup></sup>

<sup>8</sup> Les composantes d'hélicité  $R$  et  $L$  ont des isospins faibles différents.

Mésons non charmés ( $B = 0, C = 0$ )

	$M$ (MeV)	$Q$	$(S, C, \tilde{B}, T)$	$(I, I_3)^G$	$J^{PC}$
$\pi^+$	139.57	1	(0, 0, 0, 0)	(1, 1) <sup>-</sup>	0 <sup>-</sup>
$\pi^-$	139.57	-1	(0, 0, 0, 0)	(1, -1) <sup>-</sup>	0 <sup>-</sup>
$\pi^0$	134.98	0	(0, 0, 0, 0)	(1, 0) <sup>-</sup>	0 <sup>-+</sup>
$\eta$	547.45	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>+</sup>	0 <sup>-+</sup>
$\eta'(958)$	957.77	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>+</sup>	0 <sup>-+</sup>
$K^+$	493.677	1	(1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ )	0 <sup>-</sup>
$K^-$	493.677	-1	(-1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ )	0 <sup>-</sup>
$K^0$	497.672	0	(1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ )	0 <sup>-</sup>
$\overline{K^0}$	497.672	0	(-1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ )	0 <sup>-</sup>
$\rho(770)^+$	768.5	1	(0, 0, 0, 0)	(1, 1) <sup>+</sup>	1 <sup>--</sup>
$\rho(770)^-$	768.5	-1	(0, 0, 0, 0)	(1, -1) <sup>+</sup>	1 <sup>--</sup>
$\rho(770)^0$	768.5	0	(0, 0, 0, 0)	(1, 0) <sup>+</sup>	1 <sup>--</sup>
$\phi(1020)$	1019.41	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	1 <sup>--</sup>
$\omega(782)$	781.94	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	1 <sup>--</sup>
$K^*(892)^+$	891.59	1	(1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ )	1 <sup>-</sup>
$K^*(892)^-$	891.59	-1	(-1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ )	1 <sup>-</sup>
$\overline{K^*(892)^0}$	896.1	0	(1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ )	1 <sup>-</sup>
$\overline{K^*(892)^0}$	896.1	0	(-1, 0, 0, 0)	( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ )	1 <sup>-</sup>
$f_0(400 - 1200)$	400	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>+</sup>	0 <sup>++</sup>
$f_0(980)$	980	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>+</sup>	0 <sup>++</sup>
$a_0(980)^+$	983.5	1	(0, 0, 0, 0)	(1, 1) <sup>-</sup>	0 <sup>++</sup>
$a_0(980)^0$	983.5	0	(0, 0, 0, 0)	(1, 0) <sup>-</sup>	0 <sup>++</sup>
$a_0(980)^-$	983.5	-1	(0, 0, 0, 0)	(1, -1) <sup>-</sup>	0 <sup>++</sup>
$h_1(1170)$	1170	-1	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	1 <sup>+-</sup>
$b_1(1235)^+$	1231	1	(0, 0, 0, 0)	(1, 1) <sup>+</sup>	1 <sup>+-</sup>
$b_1(1235)^0$	1231	0	(0, 0, 0, 0)	(1, 0) <sup>+</sup>	1 <sup>+-</sup>
$b_1(1235)^-$	1231	-1	(0, 0, 0, 0)	(1, -1) <sup>+</sup>	1 <sup>+-</sup>
$\phi(1680)$	1680	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	1 <sup>--</sup>
$\Upsilon(1S)$	9460.37	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	1 <sup>--</sup>

Mésons charmés et autres ( $B = 0$ )

	$M$ (MeV)	$Q$	$(S, C, \tilde{B}, T)$	$(I, I_3)^G$	$J^{PC}$
$D^+$	1869.3	1	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$0^-$
$D^-$	1869.3	-1	(0, -1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$D^0$	1864.5	0	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$D^*(2010)^+$	2010.0	1	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$0^-$
$D^*(2010)^-$	2010.0	-1	(0, -1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$D^*(2007)^0$	2006.7	0	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$D_s^+$	1968.5	1	(1, 1, 0, 0)	(0, 0)	$0^-$
$D_s^-$	1968.5	-1	(-1, -1, 0, 0)	(0, 0)	$0^-$
$B^+$	5278.9	1	(0, 0, 1, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$0^-$
$B^-$	5278.9	-1	(0, 0, -1, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$B^0$	5279.2	0	(0, 0, 1, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$0^-$
$B_s^0$	5369.3	0	(0, 0, 1, 0)	(0, 0)	$0^-$
$\eta_c(1S)$	2979.8	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>+</sup>	$0^{++}$
$J/\Psi(1S)$	3096.88	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	$0^{--}$
$\Psi(2S)$	3686.	0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0) <sup>-</sup>	$1^{--}$

Baryons non charmés ( $B = 1, C = 0$ )

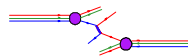
	$M$ (MeV)	$Q$	$(S, C, \tilde{B}, T)$	$(I, I_3)^G$	$J^{PC}$
$p$	938.27	1	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$n$	939.56	0	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$\Lambda$	1115.68	0	(-1, 0, 0, 0)	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma^+$	1189.37	1	(-1, 0, 0, 0)	(1, 1)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma^-$	1197.44	-1	(-1, 0, 0, 0)	(1, -1)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma^0$	1192.55	0	(-1, 0, 0, 0)	(1, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$\Xi^0$	1314.9	0	(-2, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$\Xi^-$	1321.32	-1	(-2, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}^+$
$\Delta(1232)^-$	1232	-1	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Delta(1232)^0$	1232	0	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Delta(1232)^+$	1232	1	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Delta(1232)^{++}$	1232	2	(0, 0, 0, 0)	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Sigma(1385)^+$	1382.8	1	(-1, 0, 0, 0)	(1, 1)	$\frac{3}{2}^+$
$\Sigma(1385)^-$	1383.7	-1	(-1, 0, 0, 0)	(1, -1)	$\frac{3}{2}^+$
$\Sigma(1385)^0$	1387.2	0	(-1, 0, 0, 0)	(1, 0)	$\frac{3}{2}^+$
$\Xi(1530)^0$	1530.8	0	(-2, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Xi(1530)^-$	1535.0	-1	(-2, 0, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}^+$
$\Omega^-$	1672.45	-1	(-3, 0, 0, 0)	(0, 0)	$\frac{3}{2}^+$

**Baryons charmés et autres ( $B = 1$ )**

	$M$ (MeV)	$Q$	$(S, C, \bar{B}, T)$	$(I, I_3)^G$	$J^{PC}$
$\Lambda_c^+$	2284.9	1	(0, 1, 0, 0)	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma_c(2455)^{++}$	2452.9	2	(0, 1, 0, 0)	(1, 1)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma_c(2455)^+$	2453.5	1	(0, 1, 0, 0)	(1, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma_c(2455)^0$	2452.1	0	(0, 1, 0, 0)	(1, -1)	$\frac{1}{2}^+$
$\Xi_c^+$	2465.6	1	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}^+$
$\Xi_c^0$	2470.3	0	(0, 1, 0, 0)	$(\frac{1}{2}, -1)$	$\frac{1}{2}^+$
$\Omega_c^0$	2704	0	(-2, 1, 0, 0)	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$
$\Lambda_b^0$	5641	0	(0, 0, -1, 0)	(0, 0)	$\frac{1}{2}^+$

**Collisionneurs**

	Projet/Laboratoire	Énergie (GeV)	Circonférence (km)	
$e^+e^-$	CESR (1979) Cornell-Ithaca, USA	6 + 6		
	PEP SLAC-Stanford, USA	15 + 15		
	PEP-II (1999) SLAC-Stanford, USA	9 + 3.1		
	PETRA (1992-) DESY-Hambourg, All.	23 + 23		
	TRISTAN (1999) Tsukuba-KEK, Japon	30 + 30		
	SLC (1989) SLAC-Stanford, USA	50 + 50		
	LEP I et II (1990-) CERN-Genève, Suisse	I: 45 + 45 II: 87 + 87	26.659	
	VLEPP (?) INP-Serpukov, Russie	500 + 500 1000 + 1000		
	$p\bar{p}, pp$	SppS (1981-1990) CERN-Genève, Suisse	315	6.911
		Tevatron (1987-) Fermilab-Batavia, USA	900 + 900	6.28
LHC (~2004) CERN-Genève, Suisse		7000 + 7000	26.659	
SSC (Annulé) SSC-Waxahachie, USA		20000 + 20000	87.12	
$ep$		HERA (1992-) DESY-Hambourg, All.	$e: 30 + p: 820$	6.336



# Index

- Accélérateurs, 26
  - circulaires, 27
  - linéaires, 26
- Annihilation  $e^+e^-$ , 231
- Antiparticule, 8
  
- Baryons, 147
  - charmés, 166
  - masse, 158
  - moments magnétiques, 160
- Bosons, 7
- Bottom
  - nombre quantique, 110
  - quarks, 110
  
- Cabbibo
  - angle de, 208
- Calorimètre, 48
- Chambre
  - à streamer, 45
  - à bulles, 46
  - à dérive, 45
  - à flash, 45
  - à fils, 44
  - d'ionisation, 42
  - de Wilson, 46
- Champs
  - théorie quantique des, 15
- Charge faible, 202
- Charme
  - nombre quantique, 109
  - quarks, 164
- Charme, 209
- Cinématique relativiste, 289
- Clebsch-Gordan
  - coefficients de, 286
  
- Compteur
  - à scintillations, 47
  - Cerenkov, 47
  - de Geiger-Muller, 42
  - à gerbes, 48
  - proportionnel, 42
  - proportionnel multifils, 44
- Confinement, des quarks, 227
- Conjugaison de la charge, 111
  - antiparticule, 114
  - du photon, 113
  - du pion, 113
  - invariance, 113
  - parité totale, 112
- Couleur
  - évidence expérimentale, 156
  - fonctions d'onde, 155
  - groupe  $SU(3)$ , 154
  - nombre quantique, 154
- Courants neutres, 209
- $\mathcal{CP}$ 
  - violation de, 217
- Création de paire, 42
  
- Dalitz
  - diagrammes de, 119
- Description
  - des interactions, 64
  - de Heisenberg, 65
  - de Schrödinger, 64
- Désintégration
  - du proton, 253
  - largeur de, 72
- Détecteurs, 38
  - à rayonnement de transition, 48
  - calorimètre, 48
  - chambre à bulles, 46

- chambre à dérive , 45
- chambre à fils, 44
- chambre à flash, 45
- chambre à streamer, 45
- chambre d'ionisation, 42
- chambre de Wilson, 46
- compteur à gerbes, 48
- Compteur à scintillations, 47
- compteur Cerenkov, 47
- compteur de Geiger-Muller, 42
- compteur proportionnel, 42
- compteur proportionnel multifils, 44
- émulsion photographique, 46
- semiconducteur, 46
- Diffusion
  - de Coulomb, 39
  - $e - N$ , 182, 221
  - $e$ -Noyau non-polarisée, 175
  - $e$ -Noyau polarisée, 181
  - hadron-hadron, 241
  - $\nu - N$ , 236
- Dirac
  - équation de, 15, 297
- Dirac
  - matrices de, 15
- Divergences, 245
- Drell-Yan
  - processus de, 242
- Effet Compton, 42
- Effet photoélectrique, 42
- Émulsion photographique, 46
- Espace de phase, 67, 75, 118
- Étrangeté
  - nombre quantique, 107
- Facteur de forme, 178, 182
- Fermi
  - Théorie de, 195
- Fermions, 7
- Fonctions de structure, 238
- Formalisme quadri-dimensionnel, 11
- Gell-Mann-Nishijima, relation, 105, 111
- Modèle GIM, 209
- Gravité quantique, 264
- Groupes
  - de rotation en 2D, 133
  - de rotation en 3D, 134
  - de Lie, 129
  - poids, 131
- propriétés, 128
- racines, 131
- rang, 131
- représentations, 130, 141, 142, 145
  - $SU(2)$ , 104, 136
  - $SU(3)$ , 137
  - $SU(N)$ , 135, 141
- tableaux de Young, 142
- théorie des, 128
- $U(1)$ , 135
- Hadrons, 5
- Heisenberg
  - description, 65
- Higgs
  - mécanisme de, 204
  - particule de, 204, 206
- Hypercharge
  - nombre quantique, 107
- Interactions, 6
  - description, 64
- Interactions faibles, 20, 107, 193
  - autres saveurs, 109
  - classification, 193
  - étrangeté, 107
  - parité, 87
  - symétrie  $\mathcal{CP}$ , 115
  - théorie de Fermi, 195
  - théorie de Weinberg-Salam, 201
  - interaction  $V - A$ , 195
- Interactions fortes, 21
  - autres saveurs, 109
  - QCD, 221
  - résiduelles, 23
- Interactions gravitationnelles, 23
- Interactions électromagnétiques, 19, 175
  - succès de QED, 185
- Invariance d'échelle, 222
- Invariance de jauge, 92, 189
- Invariance sous  $\mathcal{C}$ , 113
- Inversion du temps, 90
  - opérateur  $\mathcal{T}$ , 90
- Ionisation, 39
- Isospin, 102
  - conservation, 106
- Jets, 233, 234
- Physique du  $K^0$ , 213



- Klein-Gordon
  - équation de , 14
- Kobayashi-Maskawa
  - matrice de, 208
- Leptons, 3
- Liberté asymptotique, 227
- Lois de conservation
  - charge électrique, 99
  - nombre baryonique, 101
  - nombre électronique, 100
  - nombre leptonique total, 100
  - nombre muonique, 100
  - nombre tauonique, 100
- Mandelstam, variables de, 57
- Masse
  - baryons, 158
  - mésons, 158
- Matière, 3
- Matrice de diffusion, 66
- Mécanique quantique relativiste, 14
- Mésons
  - charmés, 166
  - masse, 158
  - moments magnétiques, 160
  - pseudo-scalaires, 150
  - vectoriels, 152
- Modèle de Weinberg-Salam, 202
- Moments magnétiques
  - baryons, 160
  - mésons, 160
- Monopôles magnétiques, 254
- Muons
  - production de paires, 184
- Noether
  - théorème de, 82
- Nombre baryonique, 101
- Nombre électronique, 100
- Nombre leptonique total, 100
- Nombre muonique, 100
- Nombre tauonique, 100
- Parité, 86
  - des antiparticules, 89
  - conservation de la, 88
  - intrinsèque, 87
  - non-conservation de la, 199
  - orbitale, 87
- Parité de charge totale, 112
- Parité- $\mathcal{G}$ , 116
- Partons, 223
  - invariance d'échelle, 223
- Photon, 95, 113
- Pion, 113
- Propagateur, 17
- Quarks, 5
  - bottom, 110
  - charme, 109, 164
  - confinement des, 227
  - diagrammes de, 163
  - étrange, 107
  - existence, 242
  - modèle des, 125, 141, 238
  - top, 110
- Radioactivité, 25
- Rapidité, 62
- Rayonnement de freinage, 40
- Rayons cosmiques, 25
- Relativité restreinte, 287
- Renormalisabilité, 245
- Résonances, 118
- Rotation, invariance sous, 84
- Schrödinger
  - description, 64
  - équation d'onde , 14
- Section efficace, 68
- Supercordes, 267
- Supersymétrie, 259
- Symétrie  $SU(2)$ , 104
- Symétries, 81
- Synchrotrons, 27
- Système à 4 corps
  - centre de masse, 59
  - laboratoire, 61
- Système
  - d'unités naturelles, 8
- Technicouleur, 257
- Théorème  $CPT$ , 115
- Top
  - nombre quantique, 110
  - quarks, 110
- Transformation de jauge, 93
  - invariance sous, 93
- Translation, invariance sous, 83
- Unification des forces, 249

Unification

- des forces, 245
- grande unification, 249
- modèle  $SO(10)$ , 255
- modèle  $SU(5)$ , 251
- modèle d'Abbott et Farhi, 258
- modèle Pati et Salam, 256
- modèles composites, 258

Vie moyenne, 72

Violation d'échelle, 242

Violation de  $\mathcal{CP}$ , 115

Yukawa

- approche de, 16
- potentiel de, 16

